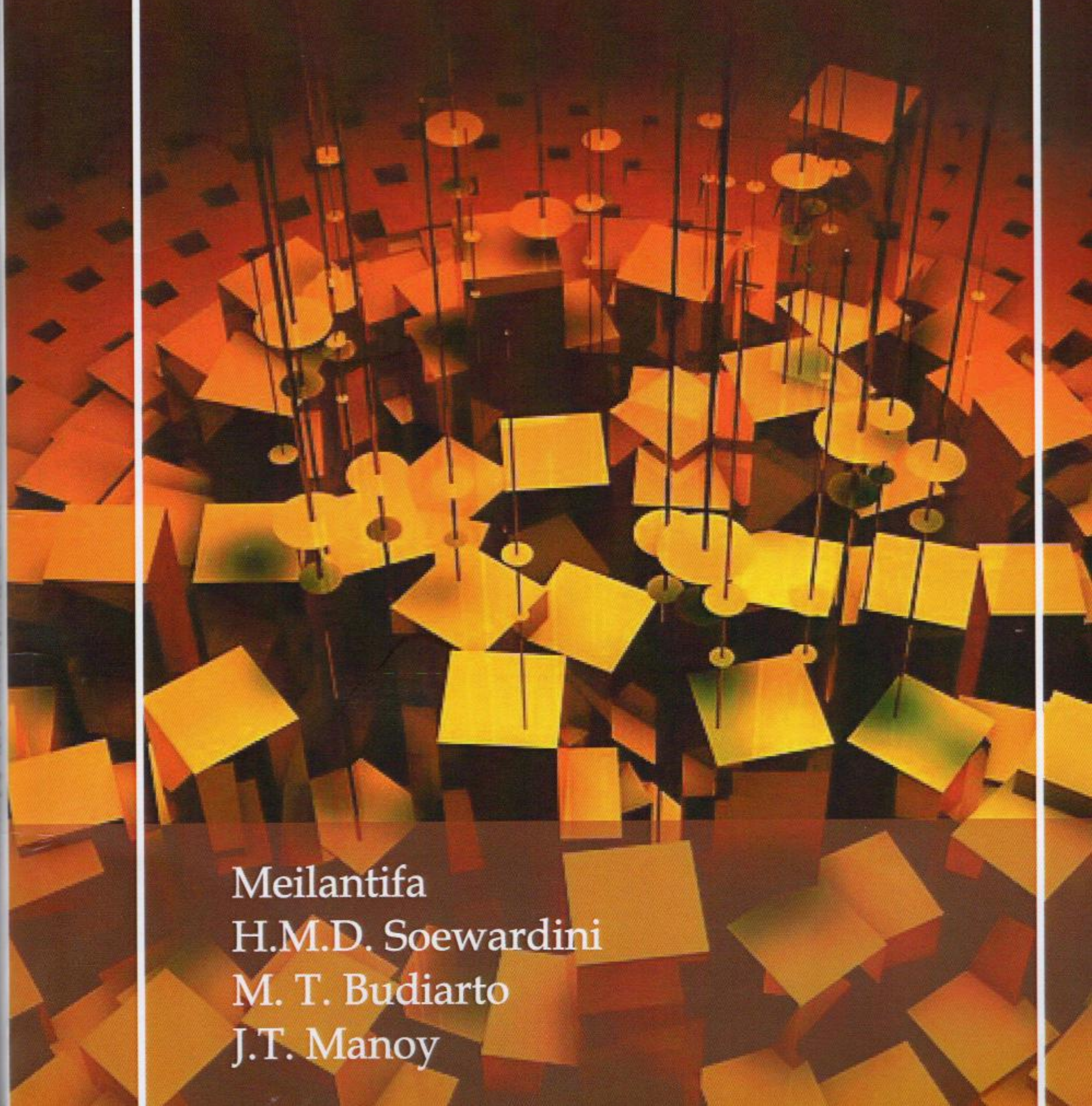
Geometri Datar



Meilantifa
H.M.D. Soewardini
M. T. Budiarto
J.T. Manoy

GEOMETRI DATAR

Oleh:

Meilantifa, S.Pd., M.Pd.

Herfa M. Dewi Soewardini, S.Si, M.Pd

Prof. Dr. Mega Teguh Budiarto, M.Pd.

Dr. Janet T. Manoy, M.Pd.

GEOMETRI DATAR

Meilantifa, S.Pd., M.Pd.

Herfa M. Dewi Soewardini, S.Si, M.Pd

Prof. Dr. Mega Teguh Budiarto, M.Pd.

Dr. Janet T. Manoy, M.Pd.

Jurusan Bahasa dan Sastra Arab
Fakultas Adab dan Humaniora UIN Sunan Gunung Djati
Jl. A.H. Nasution 105, Cibiru Bandung 081221153371 laman:
http://bsa.uinsgd.ac.id dan http://digital.uinsgd.ac.id surel:bsa@uinsgd.ac.id

Gemetri Datar

Penulis: Meilantifa, S.Pd,
Herfa M. Dewi Sewardini S.Si, M.Pd,
Prof. Dr. Mega Teguh Budiarto, M.Pd,
Dr. Janet T. Many, M.Pd.
Penyunting: Yadi Mardiansyah
Tata letak: Iis Sayyidah Nur Azizah
Sampul: Yadi Mardiansyah

Diterbitkan oleh :

Bahasa dan Sastra Arab
Fakultas Adab dan Humaniora
Univeristas Islam Negeri Sunan Gunung Djati
Jl. A.H. Nasution 105, Cibiru Bandung 081221153371
laman: http://bsa.uinsgd.ac.id dan http://digital.uinsgd.ac.id
surel:bsa@uinsgd.ac.id

Cetakan I, September 2018

viii + 239 hlm; 17,5 x 23 cm

ISBN: 978-602-52105-7-0

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah penulis penjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayahNya sehingga penulis dapat menyelesaikan buku geometri datar.

Buku geometri datar ini ditulis sebagai hasil penelitian dengan judul "Pengembangan Model Perangkat Pembelajaran Geometri Dengan *Problem Solving* Berbasis *Rigorous Mathematical Thinking* Di Universitas Wijaya Kusuma Surabaya" yang bertujuan untuk membantu mahasiswa matematika/pendidikan matematika dalam memahami geometri datar.

Penulisan buku geometri datar ini hasil curahan ide dari dosen di dua Universitas, yaitu Universitas Negeri Surabaya dan Universitas Wijaya Kusuma Surabaya. Terima kasih kepada Prof. Dr. Mega Teguh Budiaro, M.Pd dan Dr. Janet Trineke Manoy, M.Pd., yang telah membantu penulisan buku ini. Terima kasih pula untuk Mochammad Amirudin, S.Pd., yang telah melayout awal, mendesain sampul dan sekaligus editor.

Kritik dan saran kami harapkan untuk perbaikan buku ini.

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
SEJARAH EUCLID DAN SISTEM AKSIOMATIK

A. Sejarah Euclid

Tidak banyak orang yang beruntung memperoleh kemasyhuran yang abadi seperti Euclid, ahli ilmu ukur Yunani yang besar. Meskipun semasa hidupnya tokoh-tokoh seperti Napoleon, Martin Luther, Alexander yang Agung, jauh lebih terkenal ketimbang Euclid tetapi dalam jangka panjang ketenarannya mungkin mengungguli semua mereka yang disebut itu.

Selain kemasyhurannya, hampir tak ada keterangan terperinci mengenai kehidupan Euclid yang bisa diketahui. Misalnya, kita tahu dia pernah aktif sebagai guru di Iskandariah, Mesir, di sekitar tahun 300 SM, tetapi kapan dia lahir dan kapan dia wafat betul-betul gelap. Bahkan, kita tidak tahu di benua apa dan di kota apa dia dilahirkan. Meski dia menulis beberapa buku dan diantaranya masih ada yang tertinggal, kedudukannya dalam sejarah terutama terletak pada textbooknya yang hebat mengenai ilmu ukur yang bernama *The*

Elements.

Arti penting buku *The Elements* tidaklah terletak pada pernyataan rumus-rumus pribadi yang dilontarkannya. Hampir semua teori yang terdapat dalam buku itu sudah pernah ditulis orang sebelumnya, dan juga sudah dapat dibuktikan kebenarannya. Sumbangan Euclid terletak pada cara pengaturan dari bahan-bahan dan permasalahan serta formulasinya secara menyeluruh dalam perencanaan penyusunan buku. Di sini tersangkut, yang paling utama, pemilihan dalil-dalil serta perhitungan-perhitungannya, misalnya tentang kemungkinan menarik garis lurus diantara dua titik. Sesudah itu dengan cermat dan hati-hati dia mengatur dalil sehingga mudah difahami oleh orang-orang sesudahnya. Bilamana perlu, dia menyediakan petunjuk cara pemecahan hal-hal yang belum terpecahkan dan mengembangkan percobaan-percobaan terhadap permasalahan yang terlewatkan. Perlu dicatat bahwa buku *The Elements* selain terutama merupakan pengembangan dari bidang geometri yang ketat, juga di samping itu mengandung bagian-bagian soal aljabar yang luas berikut teori penjumlahan.

Buku *The Elements* sudah merupakan buku pegangan baku lebih dari 2000 tahun dan tak syah lagi merupakan *textbook* yang paling sukses yang pernah disusun manusia. Begitu hebatnya Euclid menyusun bukunya sehingga dari bentuknya saja sudah mampu menyisihkan semua *textbook* yang pernah dibikin orang sebelumnya dan yang tak pernah digubris lagi. Aslinya ditulis dalam bahasa Yunani, kemudian buku *The Elements* itu diterjemahkan ke dalam pelbagai bahasa. Terbitan pertama muncul tahun 1482, sekitar 30 tahun sebelum penemuan mesin cetak oleh Gutenberg. Sejak penemuan mesin itu dicetak dan diterbitkanlah dalam beribu-ribu edisi yang beragam corak.

Sebagai alat pelatih logika pikiran manusia, buku *The Elements* jauh lebih berpengaruh ketimbang semua risalah

Aristoteles tentang logika. Buku itu merupakan contoh yang komplit sekitar struktur deduktif dan sekaligus merupakan buah pikir yang menakjubkan dari semua hasil kreasi otak manusia.

Adalah adil jika kita mengatakan bahwa buku Euclid merupakan faktor penting bagi pertumbuhan ilmu pengetahuan modern. Ilmu pengetahuan bukanlah sekedar kumpulan dari pengamatan-pengamatan yang cermat dan bukan pula sekedar generalisasi yang tajam serta bijak. Hasil besar yang direnggut ilmu pengetahuan modern berasal dari kombinasi antara kerja penyelidikan empiris dan percobaan-percobaan di satu pihak, dengan analisa hati-hati dan kesimpulan yang punya dasar kuat di lain pihak.

Kita masih bertanya-tanya apa sebab ilmu pengetahuan muncul di Eropa dan bukan di Cina, tetapi rasanya aman jika kita menganggap bahwa hal itu bukanlah semata-mata lantaran soal kebetulan. Memanglah, peranan yang digerakkan oleh orang-orang brilian seperti Newton, Galileo dan Copernicus mempunyai makna yang teramat penting. Tetapi, tentu ada sebab-musababnya mengapa orang-orang ini muncul di Eropa. Mungkin sekali faktor historis yang paling menonjol apa sebab mempengaruhi Eropa dalam segi ilmu pengetahuan adalah rasionalisme Yunani, bersamaan dengan pengetahuan matematika yang diwariskan oleh Yunani kepada Eropa. Patut kiranya dicatat bahwa Cina --meskipun berabad-abad lamanya teknologinya jauh lebih maju ketimbang Eropa-- tak pernah memiliki struktur matematika teoritis seperti halnya yang dipunyai Eropa. Tak ada seorang matematikus Cina pun yang punya hubungan dengan Euclid. Orang-orang Cina menguasai pengetahuan yang bagus tentang ilmu geometri praktis, tetapi pengetahuan geometri mereka tak pernah dirumuskan dalam suatu skema yang mengandung kesimpulan.

Bagi orang-orang Eropa, anggapan bahwa ada beberapa dasar prinsip-prinsip fisika yang dari padanya semuanya berasal, tampaknya hal yang wajar karena mereka punya contoh Euclid yang berada di belakang mereka. Pada umumnya orang Eropa tidak beranggapan geometrinya Euclid hanyalah sebuah sistem abstrak, melainkan mereka yakin benar bahwa gagasan Euclid --dan dengan sendirinya teorinya-- memang benar-benar merupakan kenyataan yang sesungguhnya.

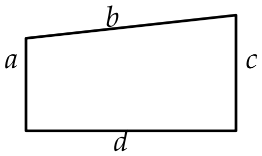
Pengaruh Euclid terhadap Sir Isaac Newton sangat kentara sekali, sejak Newton menulis buku kesohornya The Principia dalam bentuk kegeometrian, mirip dengan The Elements. Berbagai ilmuwan mencoba menyamakan diri dengan Euclid dengan jalan memperlihatkan bagaimana semua kesimpulan mereka secara logis berasal mula dari asumsi asli. Tak kecuali apa yang diperbuat oleh ahli matematika seperti Russel, Whitehead dan filosof Spinoza.

Kini, para ahli matematika sudah memaklumi bahwa geometri Euclid. bukan satu-satunya sistem geometri yang memang jadi pegangan pokok dan teguh serta yang dapat direncanakan pula, mereka pun maklum bahwa selama 150 tahun terakhir banyak orang yang merumuskan geometri bukan ala Euclid. Sebenarnya, sejak teori relativitas Einstein diterima orang, para ilmuwan menyadari bahwa geometri Euclid tidaklah selamanya benar dalam penerapan masalah cakrawala yang sesungguhnya. Pada kedekatan sekitar "Lubang hitam" dan bintang neutron --misalnya-- dimana gayaberat berada dalam derajat tinggi, geometri Euclid tidak memberi gambaran yang teliti tentang dunia, ataupun tidak menunjukkan penjabaran yang tepat mengenai ruang angkasa secara keseluruhan. Tetapi, contoh-contoh ini langka, karena dalam banyak hal pekerjaan Euclid menyediakan kemungkinan perkiraan yang mendekati kenyataan. Kemajuan ilmu pengetahuan manusia belakangan ini tidak mengurangi baik hasil upaya intelektual Euclid maupun dari arti penting kedudukannya dalam sejarah.

Menurut Bahasa, istilah geometri merupakan ukuran bumi.

Pada awalnyauntuk pengukuran praktis lahan pertanian berkembang untuk pengukuran panjang, luas dan volume. Hasilnya dinyatakan sebagai deret aritmetika yang secara empiris tidak benar.

Contoh 1.1:



Luas daerah $R = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$

R segi empat dengan panjang sisi *a, b,c,d*

Penggolongan geometri

1. Berdasar bidang kajian
   - Geobidang
   - Georuang
   - Geo n-dimensi
   - Geo bola
   - Geo segitiga
2. Berdasar bahasa yang digunakan
   - Geo analitik (Bahasa aljabar)
   - Geo murni (Bahasa gambar)
   - Geo diferensial (Bahasa der ivative)
3. Berdasar sistem aksioma
   - Geo Euclid
   - Geo non Euclid
4. Berdasar transformasi
   - Geo transformasi
5. Berdasar metode pendekatan
   - Geo induktif
   - Geo deduktif

LATIHAN 1.1

1. Siapakah Euclid?
2. Berdasarkan apa, geometri yang ditemukan oleh Euclid?

B. Sistem Aksiomatik

Sistem aksiomatik adalah suatu cara atau prosedur untuk membuktikan bahwa suatu hasil (dapat berupa teorema atau lainnya) yang didapat dari percobaan atau observasi atau pengamatan intuitif itu benar.

Bukti adalah rangkaian sederhana dari pernyataan-pernyataan yang dapat diikuti secara logis dari satu pernyataan ke pernyataan berikutnya.

Pernyataan ke 1
↓
Pernyataan ke-2
↓
Pernyataan ke-(n+1)
↓
Pernyataan ke-n
↓
Hasil

Dari rangkaian pernyataan-pernyataan tersebut, maka sistem aksiomatik juga dapat dinyatakan sebagai kumpulan dari *undefined terms* yang di dalamnya terdapat aksioma-aksioma.

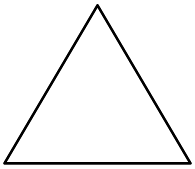
Contoh 1.2

Undefined terms : titik, garis, "pada"

Aksioma :

1. Ada tepat 3 titik berbeda
2. Dua titik berbeda pada tepat sat ugaris
3. Tidak semua titik pada garis yang sama

4. Sebarang dua garis berbeda pada minimal satu titik yang memuat keduanya.



Teorema 1. Ada tepat 3 garis
Teorema 2. Setiap garis memuat tepat 2 tiik
Teorema 3. Sebarang dua garis berbeda pada tepat satu titik

Bukti:
Menurut aksioma 1 dan 2 didapat ada minimal 3 garis. Misal ada lebih dari 3 garis, ambil kasus sederhana ada 4 garis. Menurut aksioma 2, garis ke-4 pasti berasal dari 2 titik berbeda. Menurut aksioma 1, berarti dua titik pada garis ke-4 itu adalah 2 titik dari 3 titik yang ada sehingga ada 2 titik berbeda pada lebih dari satu garis. Hal ini kontradiksi dengan aksioma 2, sehingga pemisalan salah. Jadi ada tidak lebih dari 3 garis. Karena ada minimal 3 dan tidak lebih dari 3 garis berarti ada tepat 3 garis.

LATIHAN 1.2

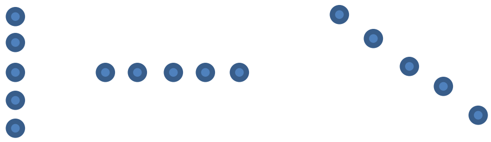
1. Jelaskan tentang sistem aksiomatik!
2. Jelaskan cara membuktikan suatu teorema dengan sistem aksiomatik!

C. Titik dan Garis

Deskripsi 1.1
Suatu titik adalah suatu tanda bundaran kecil.

Garis terdiri dari banyak titik. Ketika suatu titik berupa bundaran maka suatu garis dibuat dari titik-titik dengan jarak antar pusat bundaran. Garis ini disebut diskret. Setiap garis dapat digambarkan secara vertikal, horizontal, dan serong.

Garis-garis sejajar adalah garis yang berarah sama. Gambar-gambar berikut merupakan garis-garis diskret.



Gambar 1.1 Garis-garis diskret (vertikal, horizontal, dan serong)

Titik-titik yang terletak pada garis yang sama disebut kolinear. Ketika suatu titik dibayangkan sebagai suatu bundaran kecil, maka garis-garis memiliki ketebalan, dan di antara dua titik pada suatu garis mungkin terdapat atau tidak terdapat titik yang lain. Terdapat lebih dari satu garis yang melewati dua bundaran bergantung dari apakah garis tersebut harus melewati pusat bundaran kecil tersebut. Hal ini dapat terjadi dari dua titik yang bersilangan tetapi tidak memiliki sebarang titik persekutuan.

LATIHAN 1.3

1. Apakah yang dimaksud dengan garis diskret?
2. Buatlah matriks bundaran untuk huruf capital O dan R!
3. Gambarkan dua garis diskret yang bersilangan tapi tidak memiliki titik persekutuan!

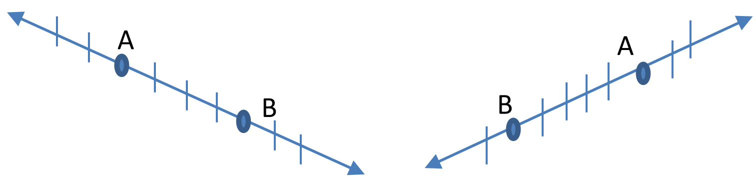
D. Tempat kedudukan Titik

Periode terbesar dari penemuan matematika adalah pada saat kekaisaran Yunani yang berlangsung dari tahun 550 sebelum Masehi hingga 150 sesudah Masehi. Matematikawan Yunani pada periode itu membuat kemajuan yang berarti pada teori bilangan dan geometri. Mereka menganggap suatu titik bukan bentuk bundaran yang nyata, namun bundaran tanpa ukuran. Bagi mereka, suatu titik dapat dinyatakan sebagai suatu lokasi yang tepat dari bundaran ini. Suatu titik dianggap memiliki dimensi nol yang berarti tanpa dimensi.

Deskripsi 1.2

Suatu titik adalah suatu lokasi yang tepat.

Ketika dua titik merupakan lokasi, maka secara alami terdapat jarak diantara dua titik tersebut. Dalam suatu peta, anda akan dapat menemukan tabel jarak dari kota ke kota. Jarak di antara dua titik bergantung kepada rute atau lintasan mana yang ditempuh. Lintasan terpendek diantara dua lokasi adalah sepanjang garis yang memuat keduanya. Sebarang garis dapat dibentuk menjadi sebarang garis bilangan. Anda dapat memilih sebarang titik yang diinginkan sebagai titik nol dan sebelah kanan titik nol merupakan bagian positif. Setiap bilangan mengidentifikasi suatu titik pada garis dan setiap titik diidentifikasi dengan tepat satu bilangan yang disebut koordinat titik. Garis tersebut dikatakan memiliki koordinat. Gambar berikut merupakan garis bilangan l.



Gambar 1.2 Garis Bilangan l

Ingat kembali pada aljabar bahwa nilai mutlak suatu bilanagn n ditulis $|n|$. Jika n positif, maka sama dengan nilai mutlak. Sebagai contoh, |6.2|= 6.2. Nilai mutlak dari suatu bilangan negative adalah lawan bilangan tersebut $|-2500| = 2500$. Nilai mutlak dari 0 adalah 0; $|0| = 0$.

Definisi 1.1

Jarak antara dua titik pada garis koordinat adalah nilai mutlak dari selisih koordinat-koordinat titik tersebut.

Dengan simbol, jarak diantara dua titik dengan koordinat x dan y adalah $|x - y|$. Jarak diantara titik-titik A dan B dituliskan AB.

Contoh 1.2

Temukan AB dari garis koordinat berikut.

Penyelesaian: koordinat A adalah 3, koordinat B adalah -1, maka $AB = |3 - (-1)| = |4| = 4$.

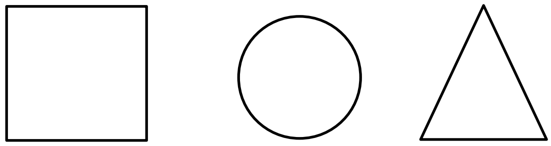
Perhatian. Ketika A dan B adalah titik-titik maka AB bukan hasil produk. Titik-titik tidak dapat dikalikan.

Karena sifat dari nilai mutlak, maka jika ditukar urutan titiknya, maka jaraknya juga sama yaitu $BA = |-1 - (3)| = |-4| = 4$. Untuk sebarang titik A dan B, maka $AB = BA$.

Suatu bidang adalah himpunan titik-titik yang dibayangkan sebagai sesuatu yang datar seperti alas meja. Pada ruang kelas, lantai ruangan dianggap sebagai suatu bidang. Lembaran kertas juga merupakan suatu bidang. Permukaan bumi bukan merupakan suatu bidang karena melengkung.

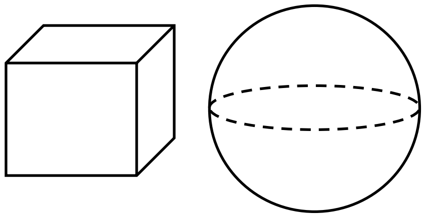
Gambaran bidang adalah himpunan titik-titik yang terdapat pada suatu bidang. Dua atau lebih gambar bidang yang terletak pada bidang yang sama disebut koplanar. Titik, garis, sinar, dan segmen adalah gambaran bidang.

Gambaran bidang lain seperti segi empat, lingkaran, dan segitiga, semua titik yang membangun bidang tersebut tidak terdapat pada garis yang sama, sehingga ini dapat dikatakan berdimensi dua.



Gambar 1.3 Dimensi Dua

Bola, balok, kubus, dan sebarang objek nyata yang tidak terletak pada bidang yang sama maka dikatakan berdimensi tiga atau gambaran ruang.



Gambar 1.4 Dimensi Tiga

LATIHAN 1.4

1. Tentukan jarak antara dua titik dengan koordinat berikut.
   a. 5 dan 14
   b. -32 dan -5
   c. x dan y
2. Apakah yang dimaksud dengan garis yang padat?

E. Himpunan Titik sebagai Pasangan Terurut

Sekitar tahun 1630, matematikawan Perancis bernama Pierre de Fermat dan Rene Descartes menyadari bahwa suatu lokasi pada bidang dapat diidentifikasi dengan suatu pasangan terurut dari bilangan real. Ini adalah ide dibalik grafik koordinat. Bidang yang memuat titik-titik ini disebut bidang Kartesian atau lebih sederhana disebut bidang koordinat.

Descartes dilahirkan di La Haye Perancis, 31 Maret 1596 dan wafat di Stockholm Swedia pada 11 Februari 1650. Beliau merupakan seorang matematikawan, fisikawan, filsuf, dan juga teolog. Beliau memberikan kontribusi yang besar dalam kemajuan di bidang matematika sehingga mendapat sebutan "Bapak Matematika Modern". Beliau adalah salah satu pemikir penting dan berpengaruh dalam sejarah barat modern.

Karya sains Descartes yang diterbitkan adalah "*Discours de la method pour bien conduire sa raison et chercher la verite dans les sciences*". Karya ini dilengkapi 3 apendiks yaitu *La Dioptrique* tentang optika, *Les Meteores* tentang meteorologi dan *La Geometrie* tentang matematika. Karya yang lain adalah Principia Philosophiae yang dipublikasikan di Amsterdam pada tahun 1644.

Salah satu materi dalam geometri analitik adalah menentukan kemiringan posisi suatu garis terhadap koordinat x dan koordinat y. beliau memperkenalkan penyelesaian untuk kemiringan dan persamaan linier. Rumus kemiringan dasar adalah $y = mx + b$, rumus kemiringan dasar adalah $m = (y - b)/x$. Banyak ahli matematika mengakui Descartes sebagai orang yang menenmukan rumus kemiringan, meskipun tidak banyak tulisan yang menunjukkan secara langsung bahwa beliau sebagai penemu rumus kemiringan. Oleh karena itu Descartes mendapat sebutan sebagai "Bapak Geometri Analitik". Kontribusinya yang besar dalam dunia matematika terutama penemuannya tentang geometri analitis yang akhirnya dikenal sebagai pencipta "Sistem Koordinat Cartesius" yang mempengaruhi perkembangan kalkulus modern.

Pelajaran hidup yang dapat diambil dari Descartes: kita harus menggunakan akal dan pikiran yang diberikan Tuhan Yang Maha Esa untuk memanfaatkan lingkungan dengan sebaik-baiknya. Jangan mudah puas terhadap sesuatu yang sudah didapatkan sehingga terus berfikir melakukan inovasi untuk menemukan hal yang baru. Kita harus mengembangkan ilmu untuk kemajuan dunia pendidikan dan harus bermanfaaat untuk orang lain di sekitar kita (https://id.m.wikipedia.org>wiki>Rene_Descartes/)

Deskripsi 1.3

Suatu titik adalah suatu pasangan terurut bilangan.

Ketika suatu titik adalah suatu pasangan terurut, maka garis adalah himpunan pasangan terurut (x, y) yang memenuhi persamaan $Ax + By = C$, dimana $A, B,$ dan C adalah bilangan tertentu.

Contoh 1.3.

Gambarkan grafik suatu pasangan terurut yang memenuhi $3x - y = 5$.

Penyelesaian:

Temukan dua titik pada garis. Buatlah tabelnya. Pilih sebarang nilai untuk x, misal 0 dan 2

Ketika $x = 0$,

$3.0 - y = 5$

$-y = 5$

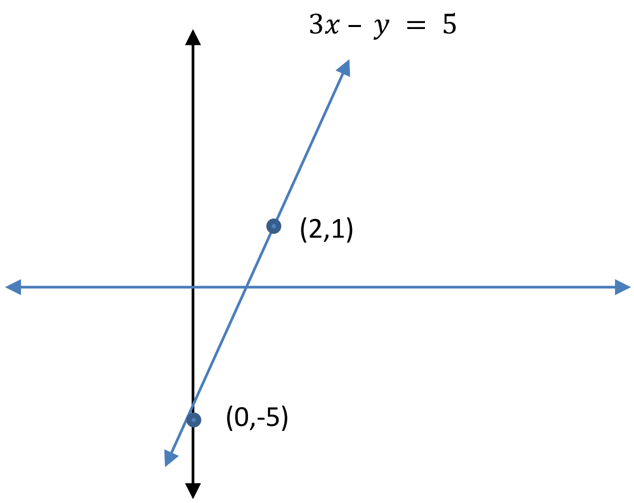
$y = -5$, maka koordinatnya (0,-5)

ketika $x = 2$,

$3.2 - y = 5$

$-y = -1$

$y = 1$, maka koordinatnya (2,1)



Empat karakteristik penting untuk membedakan deskripsi yang beragam dari titik dan garis yaitu:

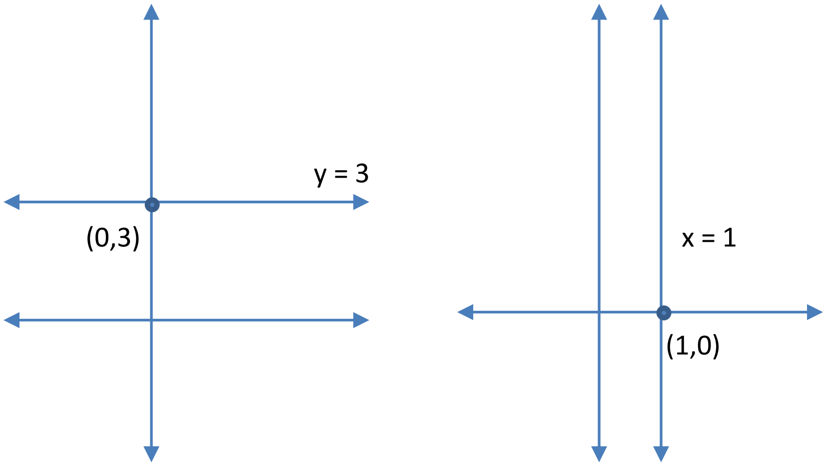
1. Garis tunggal. Apakah dua titik dapat membuat suatu garis?

2. Dimensi. Adakah titik tanpa ukuran? Adakah garis tanpa ketebalan? Apakah bidang memiliki lebih dari satu garis?
3. Garis bilangan. Dapatkan titik dari suatu garis berkorespondensi satu-satu dengan bilangan real?
4. Jarak. Adakah jarak tunggal diantara dua titik?

Titik sebagai tanda bundaran kecil tidak memiliki dimensi atau karakteristik garis bilangan, dan mungkin atau mungkin tidak memiliki dua karakteristik yang lain. Namun, titik sebagai lokasi yang tepat memiliki keempat karakteristik ini. Dan, karena suatu pasangan terurut secara tepat menggambarkan titik, maka titik dalam bidang koordinat memiliki karakteristik yang sama dengan titik sebagai lokasi yang tepat.

Pada bentuk umum persamaan garis, $Ax + By = C$, nilai dari A, B, dan C menentukan kemiringan dan lokasi garis. Jika A dan $B \neq 0$ maka garisnya miring. Jika $A = 0$ maka persamaan garis berubah menjadi $y = k$, dimana k adalah bilangan tertentu $\frac{C}{B}$, dan garisnya horizontal. Sedangkan jika $B = 0$, maka persamaan garis berubah menjadi $x = h$, dimana h adalah bilangan tertentu $\frac{C}{A}$, dan garisnya vertikal.

Menggambarkan titik sebagai pasangan terurut sangat penting dalam matematika. Himpunan pasangan terurut dapat membentuk suatu kurva, dan persamaan dapat menggambarkan kurva tersebut. Dibawah ini adalah grafik parabola dan kurva pertumbuhan eksponen, dua kurva yang akan dipelajari pada mata kuliah lain. Setiap kurva digambarkan dengan persamaannya.



Gambar 1.6

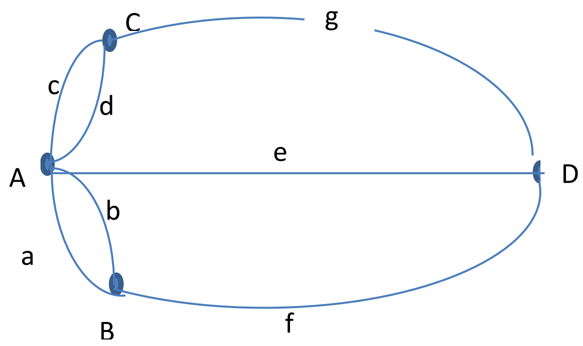
LATIHAN 1.5

1. Siapakah ahli matematika yang mengembangkan ide menggunakan pasangan terurut bilangan untuk merepresentasikan titik? Berapa lama ini berlangsung?
2. Tentukan himpunan pasangan terurut yang memenuhi setiap persamaan berikut.
3. Tentukan persamaan garis vertikal yang melalui (7,-10) dan persamaan garis horizontal yang melalui (1,-5)
4. Misalkan C memiliki koordinat -7 dan D memiliki koordinat -211. Tentukan CD dan DC!

F. Titik sebagai Jaringan

Permasalahan Jembatan Konigsberg:

Melalui kota Kaliningrad di Uni Sovyet, mengalir sungai Pregol. Ada dua pulau dalam sungai ini dan tujuh jembatan yang terhubung satu sama lain serta terhubung ke pantai. Pulaunya disimbolkan dengan A dan D. Jembatan disimbolkan dengan a, b, c, d, e, f, dan g. Pantai dimisalkan dengan B dan C. pada tahun 1700an, kota tersebut dikenal dengan Konigsberg yang berupakan bagian dari Prusia Timur. Di hari Minggu, banyak orang suka berjalan-jalan melewati jembatan-jembatan tersebut. Jalan dan jembatan ini mengarah pada suatu permasalahan. Adakah jalan melewati seluruh jembatan dimana setiap jembatan dapat dilewati tepat satu kali? Permasalahan ini dipecahkan oleh Euler pada 1736 (akan dipelajari lebih lanjut di Teori Graph). Dia menggambarkan kembali peta sebagai berikut.

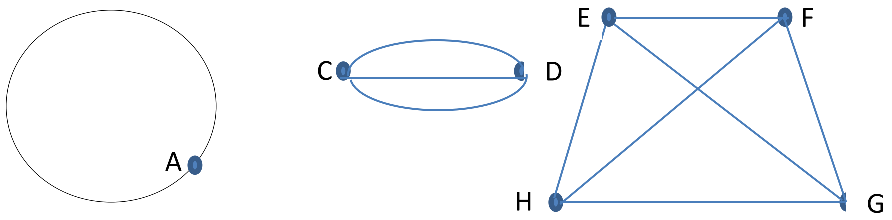


Gambar 1.7

Dalam suatu jaringan, hanya titik yang merupakan titik ujung busur. Titik ujung ini tidak memiliki ukuran dan disebut node atau titik. Euler melihat bahwa jumlah busur dari setiap node merupakan petunjuk apakah jaringan utu disebut daerah '*traversable*' (dapat dilewati).

Deskripsi 1.4
Suatu titik adalah node dari suatu jaringan.

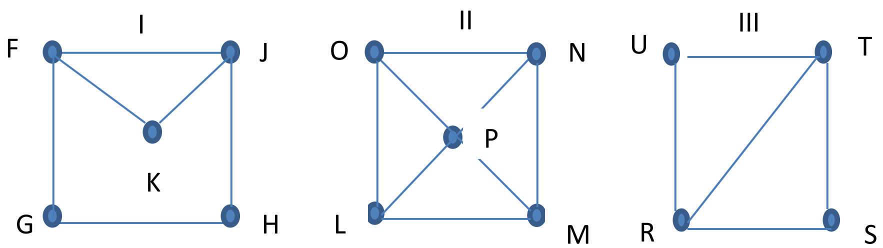
Titik dan garis dalam jaringan memiliki sifat yang berbeda dari titik dan garis sebagai tanda bundaran, lokasi, ataupun pasangan terurut. Sebagai contoh, suatu garis dalam jaringan adalah suatu busur atau segmen yang menghubungkan dua node atau satu node itu sendiri. Tidak ada titik lain diantara node-node. Sehingga suatu busur tidak memiliki koordinat dan dua node tidak dapat menentukan tepat satu busur.



Gambar 1.8

Contoh 1.4

Berapa banyak busur dari setiap node pada jaringan I, II, dan III?



Penyelesaian:

Jaringan I memiliki dua busur pada titik G, H, dan K, serta tiga busur pada titik F dan J.

Jaringan II memiliki 3 busur pada titik L, M, N, dan O serta 4 busur pada titik P.

Jaringan III memiliki 2 busur pada titik S dan U serta 3 busur pada R dan T.

Contoh 1.5

Jaringan mana pada Contoh 1.4 yang transversable?

Penyelesaian:

Jaringan I '*traversable*', dimana satu lintasan dimulai dari F – K – J – H – G – F – J.

Jaringan II tidak *traversable*.

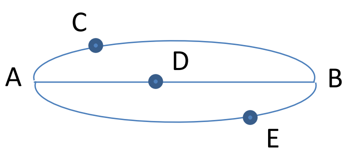
Jaringan III *traversable*, dimana ada lintasan dari R – S – T – R – U – T.

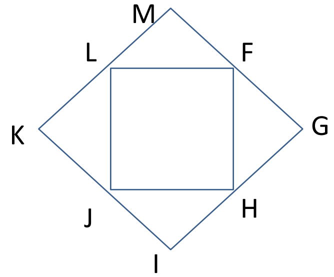
Jika banyaknya busur pada setiap node genap, maka disebut node genap, selain itu node ganjil. Pada contoh di atas, node G, H, K, P, U, dan S adalah node genap sedangkan node yang lain adalah node ganjil. Hal ini seringkali disebut titik-titik genap atau ganjil.

Euler melihat bahwa jika suatu lintasan melalui suatu titik, menggunakan dua busur, yaitu satu titik dan titik yang lain. Hal ini mengarahkannya pada permyataan jika suatu jaringan memiliki titik ganjil, maka titik ini merupakan titik pangkal atau titik akhir dari lintasan transversable. Selanjutnya Euler menyadari bahwa seluruh titik pada jaringan Konigsberg adalah ganjil, sehingga jaringan tersebut tidak traversable. Lebih jauh lagi, jika suatu jaringan memiliki lebih dari dua node ganjil, maka dapat dikatakan tidak *transversable*.

LATIHAN 1.6

1. Berapa banyak jembatan yang ada pada Konigsberg?
2. Apa yang dimaksud jaringan yang '*tranversable*'?
3. Jaringan-jaringan berikut ini adalah tranversable. a) gambarkan suatu lintasan '*tranversable*'; b) pada titik yang mana suatu lintasan '*transversable*' dimulai?





G. *Undefined Terms*

Suatu himpunan adalah suatu kumpulan objek yang disebut unsur. Jika unsur adalah titik, maka himpunan tersebut berupa gambar. Himpunan dari seluruh titik yang merupakan bagian dari gambar disebut ruang. Studi tentang gambar dalam ruang berdimensi dua dari suatu bidang seperti polygon dan lingkaran disebut sebagai geometri bidang. Studi tentang gambar dalam ruang berdimensi tiga seperti tabung dan piramida disebut sebagai geometri padat.

Definisi 1.3

Ruang adalah himpunan dari seluruh titik yang mungkin.

Suatu bidang adalah suatu himpunan titik-titik.

Definisi yang benar tidak selalu diperlukan. Bagaimanapun, dalam beberapa bidang, istilah terdefinisi tidak hanya berguna namun penting. Hukum, ekonomi, filosofi, sains, dan beberapa bidang lainnya berelasi dengan matematika. Sebagai contoh, argument dapat terjadi karena setiap individu tidak memiliki definisi atau memiliki perbedaan definisi untuk waktu lembur, atau kebebasan, atau kekuasaan atau kecabulan.

Dalam buku ini, dipilih titik, garis, dan bidang sebagai undefined terms. Selain itu juga ada klausa, preposisi, kata hubung yang juga tidak didefinisikan, serta penggunaaan kata lain dalam aljabar atau aritmatika seperti persamaan, bilangan, "sama dengan", "kurang dari" dan masih banyak lagi yang lain.

Undefined terms dalam buku ini yaitu

Istilah geometri: titik, garis, bidang.

Istilah aljabar dan aritmatika: bilangan, sama dengan, penjumlahan, dll.

Kata hubung: suatu, dari, ke, dan, atau, dll.

Jika sesuatu tidak didefinisikan, maka sesuatu tersebut dapat berarti apapun. Titik mungkin berarti 'gajah'. Jadi, untuk memperjelas bahwa kita membicarakan spesifikasi dari titik dan garis, maka diasumsikan titik dan garis memliki sifat tertentu. Sebagai contoh, jika kita asumsikan bahwa titik tidak memiliki dimensi, maka kita membicarakan tentang tanda bundaran. Jika diasumsikan bahwa diantara dua titik selalu ada titik yang lain, maka kita membicarakan garis dalam jaringan.

LATIHAN 1.7

1. Apa beda geometri datar dan geometri ruang?
2. Sebutkan dua *undefined terms* dari geometri!
3. Gambarkan garis $5x + 3y = 15$
4. Apakah asumsi tentang titik dan garis mengindikasikan bahwa titik dan garis berada di jaringan?

H. Postulat

Untuk memperjelas deskripsi titik dan garis maka asumsi-asumsi atau postulat-postulat dibentuk. Di bawah ini dinyatakan emapt asumsi tentang titik dan garis. Keempatnya dikelompokkan bersama dan disebut Postulat Titik-Garis-Bidang. Asumsi-asumsi ini diambil untuk menyesuaikan deskripsi titik sebagai suatu lokasi dan suatu pasangan terurut, karena deskripsi ini sering digunakan dalam matematika dan aplikasinya.

Postulat 1.1. Titik-Garis-Bidang

a. Asumsi garis tunggal.
   Melalui sebarang dua titik, ada tepat satu garis.
b. Asumsi dimensi.
   Terdapat suatu garis pada suatu bidang, ada titik pada bidang yang tidak terletak pada garis. Terdapat suatu

bidang pada suatu ruang, ada titik pada ruang yang tidak terletak pada bidang.

c. Asumsi garis bilangan.
   Setiap garis adalah himpunan titik-titik yang berkorespondensi satu-satu dengan bilangan real, dengan sebarang titik berkorespondensi dengan 0 dan sebarang titik yang lain berkorespondensi dengan 1.
d. Asumsi jarak.
   Pada suatu garis bilangan, ada jarak tunggal diantara dua titik.

Teorema adalah penyataan geometrik yang disimpulkan dari postulat, definisi, atau teorema sebelumnya.

Teorema 1. Dua garis berbeda berpotongan di paling banyak satu titik.

Sebagai contoh dalam aljabar, ketika akan memecahkan masalh tentang sistem $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 2x - y = 11 \end{cases}$ maka titik potong dari kedua garis dalam sistem tersebut adalah (4,-3). Kadang-kadang dua persamaan dalam suatu sistem adalah garis yang sama dan kadang dua garis tersebut juga tidak berpotongan. Ketika terdapat garis-garis sebidang yang tidak saling berpotongan tepat di satu titik, maka keduanya disebut garis-garis sejajar.

Definisi 1.4.

Dua garis sebidang m dan n adalah garis-garis sejajar, ditulis $m \parallel n$ jika dan hanya jika tidak memiliki titik yang sama atau identik.

Dalam buku *Element*, Euclid menggunakan lima postulat geometri dan lima postulat aritmatika.

Postulat 1.2. Aritmetika dan Aljabar

Postulat 1.2.1. Kesamaan

Sifat refleksif: $a = a$

Sifat simetris: jika $a = b$ maka $b = a$

Sifat transitif: jika $a = b$ dan $b = c$ maka $a = c$

Postulat 1.2.2. Kesamaan dan operasinya

Sifat penjumlahan: jika $a = b$ maka $a + c = b + c$

Sifat perkalian: jika $a = b$ maka $ac = bc$

Sifat substitusi: jika $a = b$ maka a dapat disubstitusikan untuk b pada sebarang pernyataan

Postulat 1.2.3. Ketidaksamaan dan operasinya

Sifat penjumlahan: jika $a < b$ maka $a + c < b + c$

Sifat perkalian: jika $a < b$ dan c > 0 maka $ac < bc$
jika $a < b$ dan c < 0 maka $ac > bc$

Sifat pertidaksamaan: jika a dan b adalah bilangan positif dan $a + b = c$, maka $c > a$ dan $c > b$

Sifat transitif: jika $a < b$ dan $b < c$ maka $a < c$

Postulat 1.2.4. Operasi

Sifat kumulatif penjumlahan: $a + b = b + a$

Sifat kumulatif perkalian: $ab = ba$

Sifat distributive: $a(b + c) = ab + ac$

Contoh 1.6

$3 = 4x + 2$ menjadi $4x + 2 = 3$. Sifat apakah untuk membuktikan perubahan ini?

Penyelesaian:

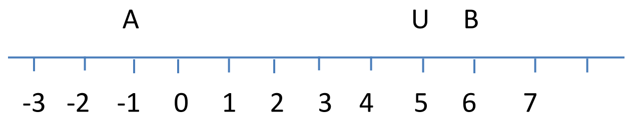
Sisi kanan dan kiri dari persamaan ditukar yaitu jika $3 = 4x + 2$ maka $4x + 2 = 3$, hal ini sesuai dengan sifat simetris dari kesamaan.

LATIHAN 1.8

1. Apakah tujuan dari postulat?
2. Tentukan x dari $2x + 46 = 30$ dan $2x + 46 < 30$. Apakah sifat yang dipakai untuk menyelesaikan x.
3. Salah satu asumsi dari Euclid yaitu "jika kesamaan ditambahkan pada kesamaan, jumlahnya sama". Sifat apa yang diberikan dari bilangan real ini?
4. Klasifikasikan dan beri contoh garis vertikal, horizontal, atau serong.

I. Gambar satu dimensi

Suatu bilangan terletak diantara dua bilangan yang lain jika lebih besar dari satu bilangan dan lebih kecil dari satu bilangan yang lain. Contohnya, 5 ada diantara -1 dan 6 karena 5 > -1 dan 5 < 6.



Suatu titik terletak diantara dua titik yang lain pada garis yang sama jika koordinatnya terletak diantara koordinat kedua titik yang lain tersebut. Contohnya (5,0) terletak diantara (-1,0) dan (6,0).

Definisi 1.5.

Segmen (segmen garis) dengan titik ujung A dan B dinotasikan dengan $\overline{AB}$ yaitu himpunan yang memuat dua titik berbeda A dan B serta seluruh titik diantara A dan B.

Jarak antara titik A dan B disebut panjang dari $\overline{AB}$. dengan definisi jarak, maka panjangnya adalah $\mathbf{|-1-6|=7}$

Pada contoh berikut, titik B terletak diantara titik A dan C. perhatikan hubungan antara panjang AB, BC, dan AC.

Contoh 1.7

Misalkan $A, B, dan\ C$ adalah tiga titik dari suatu garis bilangan dengan koordinat -53, 212, dan 670. hitung jaraknya dan tunjukkan $AB + BC = AC$.

Penyelesaian:

$$AB = \mathbf{|-53-212| = |-265| = 265}$$
$$BC = \mathbf{|212-670| = |-458| = 458}$$
$$AC = \mathbf{|-53-670| = |-723| = 723}$$

Jadi $AB + BC$ = 265 + 458 = 723 yang sama dengan AC

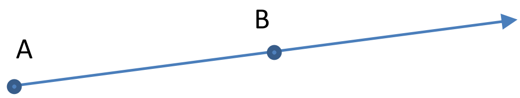
Teorema 1.1 (Teorema Antara)

Jika B diantara A dan C, maka $AB + BC = AC$ atau jika B terletak pada $\overline{AC}$ maka $AB + BC = AC$.

Menggunakan teorema antara dan sifat pertidaksamaan maka jika B diantara A dan C, maka $AC > AB$ dan $AC > BC$.

Definisi 1.6.

Sinar dengan titik pangkal A dan memuat titik B dinotasikan dengan $\overrightarrow{AB}$, memuat titik-titik pada $\overline{AB}$ dan seluruh titik di sebelah kanan titik B hingga ujung sinarnya.



Sebagai contoh, jika A memiliki koordinat 5 dan B memiliki koordinat 7, maka $\overrightarrow{AB}$ terdiri dari seluruh titik dengan koordinat $x \geq 5$, jika C memiliki koordinat 4 maka $\overrightarrow{AC}$ terletak pada arah yang berlawanan dengan $\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AC}$ terdiri dari seluruh titik dengan koordinat $x \leq 5$. $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$ dikatakan sinar yang berlawanan.

Definisi. 1.7
$\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$ adalah sinar yang berlawanan jika dan hanya jika A diantara B dan C.

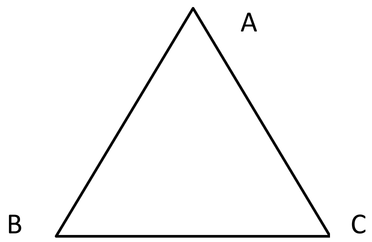
Perhatikan! Hati-hatilah saat membedakan simbol-simbol berikut.
$\overleftrightarrow{AB}$ adalah garis yang ditentukan dengan titik A dan B
$\overrightarrow{AB}$ adalah sinar dengan titik pangkal A dan memuat titik B
$\overline{AB}$ adalah segmen dengan titik ujung-ujungnya A dan B.
AB adalah jarak diantara A dan B, atau panjang $\overline{AB}$
AB adalah bilangan tunggal sedangkan $\overline{AB}$ adalah himpunan titik-titik.

LATIHAN 1.9

1. Pada garis bilangan, titik A memiliki koordinat 2, titik B memiliki koordinat -2, titik C memiliki koordinat $\sqrt{2}$. Titik apa diantara dua titik yang lain?
2. Jika X diantara Y dan Z maka manakah dari pernyataan ini yang sesuai.
3. Pada garis bilangan, tentukan himpunan bilangan yang memenuhi $y \leq 1$, $7 \leq x \leq 8{,}3$. Bagaimanakah bentuk grafiknya.

J. Ketidaksamaan Segitiga

Teorema Antara menyatakan bahwa B diantara A dan C, maka $AB + BC = AC$. Jika B tidak terletak pada $\overleftrightarrow{AC}$, maka A, B, dan C membentuk titik-titik dari suatu segitiga. Ini disebut ketidaksamaan segitiga.



Postulat 1.3 Ketidaksamaan Segitiga

Jumlah dari panjang dua sisi dari sebarang segitiga lebih besar dari panjang sisi ketiga.

Pada ΔABC diatas, hubungan ketidaksamaan yang benar adalah $AB + BC > AC$ dan $BC + AC > AB$ dan $AB + AC > BC$

Contoh 1.8

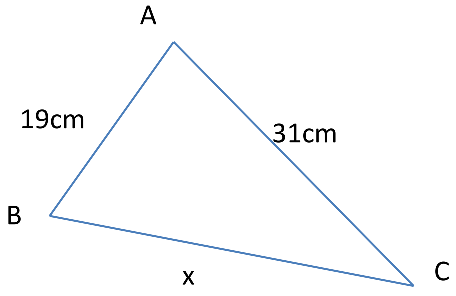
Dapatkah suatu segitiga memiliki sisi-sisi 3cm, 5cm, dan 10 cm?

Penyelesaian:

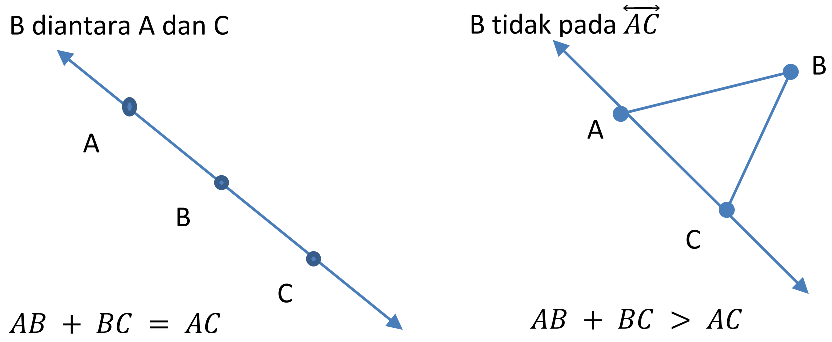
Apakah jumlah kedua sisi terpendek lebih besar dari panjang sisi ketiga? Apakah 3cm + 5cm > 10cm? tidak. Jadi tidak ada segitiga dengan panjang sisi-sisi tersebut.

Contoh 1.9

Misalkan dua sisi segitiga memiliki panjang sisi berturut-turut 19cm dan 31cm. Berapakah kemungkinan panjang sisi ketiga?



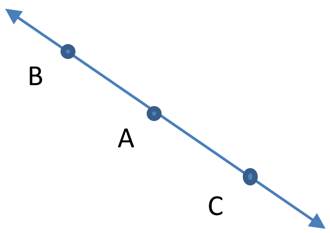
Penyelesaian:
Misalkan x adalah panjang sisi ketiga segitiga. Substitusikan kedalam ketaksamaan segitiga untuk menemukan nilai x yang mungkin.
$19 + 31 > x$ dan $19 + x > 31$ dan $31 + x > 19$
Selesaikan masing-masing ketaksamaan.
$50 > x$ dan $x > 12$ dan $x > -12$
Dua ketaksamaan yang pertama menunjukkan bahwa $\overline{BC}$ pasti lebih kecil dari 50cm tetapi lebih panjang dari 12cm. ini dapat ditulis sebagai $12 < x < 50$. (ketaksamaan ketiga menunjukkan bahwa $\overline{BC}$ pasti lebih panjang dari -12 tetapi karena panjangnya positif, maka ini bukan penyelesaian).



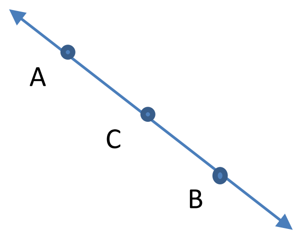
Gambar 1.9

Kemungkinan lain dari tiga titik berbeda A, B, dan C

B pada $\overleftrightarrow{AC}$, A diantara B dan C



B pada $\overleftrightarrow{AC}$, C diantara A dan B



Gambar 1.10

Misalkan A diantara B dan C , maka sesuai Teorema Antara,

$$BC = BA + AC$$

Tambahkan AB pada kedua sisi,

$$AB + BC = AB + BA + AC$$

Sesuai sifat ketidaksamaan maka

$$AB + BC > AC$$

Teorema 1.2

Jika A, B, dan C adalah titik-titik berbeda dan $AB + BC = AC$, maka B terletak pada $\overline{AC}$

Teorema 1.3

Untuk sebarang titik A, B, dan C maka berlaku

$$AB + BC \geq AC$$

Contoh 1.10

Rosa tinggal di Gresik, 12mil dari bandara dan 3,5mil dari kantornya. Berapakah jarak yang mungkin dari kantornya ke bandara?

Penyelesaian:

Menggunakan teorema yang terakhir dengan titik-titik G, B, dan K, maka

$GK + GB \geq KB$ dan $GK + KB \geq GB$ dan $GB + KB \geq GK$

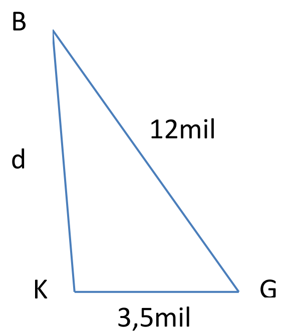
$3,5 + 12 \geq KB$ dan $3,5 + KB \geq 12$ dan $12 + KB \geq 3,5$

$15,5 \geq KB$ dan $KB \geq 8.5$ dan $KB \geq -8,5$

Sehingga

$15,5 \geq KB \geq 8,5$

Jarak dari kantor Rosa ke bandara adalah paling sedikit 8,5 mil atau tidak lebih dari 15,5mil



LATIHAN 1.10

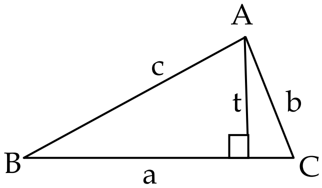
1. Sebutkan tiga ketidaksamaan memenuhi panjang sisi dari segitiga ABC.
2. Misalkan dua sisi dari suatu segitiga memiliki panjang 16inci dan 11inci. Berapakah panjang yang mungkin dari sisi ketiga?

3. Misalkan A diantara B dan C. Apakah yang dapat disimpulkan dengan teorema antara?
4. Postulat aljabar apakah yang menjamin $PQ + QR = QR + PQ$
5. Gambarkan garis bilangan diketahui WY = 17, WZ = 23, dan XZ = 21

BAB II
SEGITIGA

A. Definisi Segitiga

Segitiga adalah bangun datar yang terjadi dari tiga ruas garis yang setiap ruas garis bertemu ujungnya. Pada segitiga setiap ruas garis yang membentuk segitiga dinamakan sisi segitiga ($\overline{AC}$, $\overline{BC}$, dan $\overline{AB}$), sedangkan pertemuan ujung-ujung ruas garis disebut titik sudut ($\angle ACB$, $\angle CAB$ dan $\angle CBA$) . Perhatikan gambar ΔABC di bawah ini.



Gambar 2.1

Keliling $\Delta ABC = a + b + c$

Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2}\ at$

Contoh 2.1

Diketahui sebuah segitiga samakaki memiliki panjang alas 12 cm dan tinggi 12 cm. Tentukan luas dan kelilingnya!

Penyelesaian :

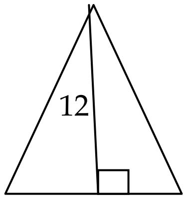
Diketahui : panjang alas = 10 cm → $a = 10$

Tinggi = 12 cm → $t = 12$

Luas = $\frac{1}{2}$ at

= $\frac{1}{2}$. 10. 12

= 60



$c^2 = 5^2 + 12^2$

= 25 + 144

$= 169$

$c = \sqrt{169} = 13$

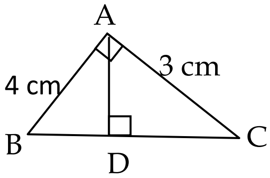
Keliling = 10 + 13 + 13

= 36

Jadi Luas ΔABC adalah 60 cm² dan kelilingnya adalah 36 cm.

LATIHAN 2.1

1. Sebuah segitiga sama kaki memiliki keliling 32 cm dan alas 12 cm. Berapakah luasnya?
2. Diketahui segitiga ABC dengan garis tinggi AD seperti gambar berikut :

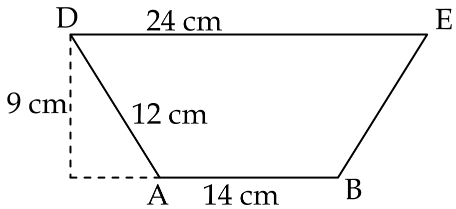


Jika ∠BAC = 90°, AB = 4 cm, dan AC = 3 cm. Tentukan :

a. luas ΔABC

b. panjang $\overline{AD}$

3. Perhatikan gambar berikut.



Hitunglah: a. Luas segitiga ABD

b. Luas segitiga BCD

c. Luas bangun ABCD

4. Sebuah taman berbentuk segitiga samakaki dengan panjang sisi yang sama 15 m, panjang sisi lainnya 12 m, dan tingginya 7 m. Jika taman tersebut akan ditanami rumput dengan biaya Rp80.000,00/m^2. Hitunglah biaya keseluruhan yang diperlukan!
5. Sebidang tanah berbentuk segitiga dengan panjang tiap sisi tanah berturut-turut 4 m, 5 m, dan 7 m. Di sekeliling tanah tersebut akan dibuat pagar dengan biaya Rp125.000,00/m. Berapakah biaya yang diperlukan untuk membuat pagar tersebut?

B. Garis-Garis Istimewa dalam Segitiga

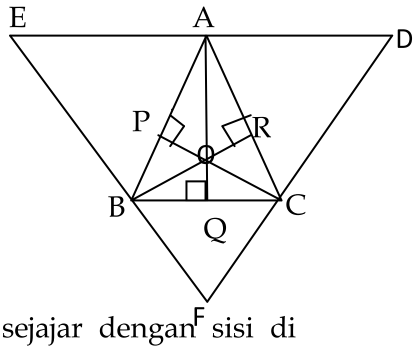
Di sini akan kita bahas pengertian dari masing-masing garis istimewa tersebut agar lebih mudah untuk dipahami. Di antara garis-garis istimewa pada segitiga tersebut akan dijelaskan berikut.

1. Garis Tinggi

Definisi 2.1

Garis tinggi segitiga adalah garis yang melalui salah satu titik sudut segitiga dan tegak lurus sisi di depannya.

Perhatikan ΔABC di samping, dan buktikan bahwa ketiga garis tinggi dalam ΔABC tersebut melalui satu titik.



Bukti :

Perhatikan ΔABC pada gambar di samping. Melalui titik $A, B,$ dan C ditarik garis-garis yang masing-masing sejajar dengan sisi di hadapan titik sudut itu. Apabila garis-garis itu berpotongan di D, E dan $F,$ maka $\overline{DE} \parallel \overline{CB},$ $\overline{EF} \parallel \overline{AC},$ $\overline{DF} \parallel \overline{AB}.$ Perhatikan segiempat $ABFC.$ $\overline{AB} \parallel \overline{CF},$ $\overline{AC} \parallel \overline{BF},$ maka $ABFC$ adalah jajar genjang. $AB = CF$. Analog untuk segiempat ABCD dan segiempat ACBF.

Sehingga diperoleh $AB = CD$ dan $AB = CF$.

$EC = FA = DB$, maka $C \perp \overline{DF}$

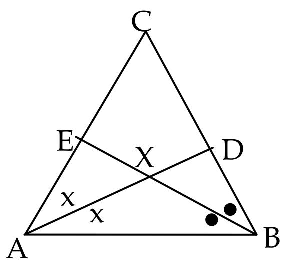
Analog $A \perp \overline{DE}$

$B \perp \overline{EF}$

Berdasarkan sifat di atas, maka didapat bahwa $OD = AO$, $OE = BO$, dan $OF = CO$ karena O pada $\overline{AQ}$, O pada $\overline{BR}$ dan O pada $\overline{CP}$ dan $\overline{AQ}$, $\overline{BR}$, dan $\overline{CP}$ adalah garis tinggi pada ΔABC maka terbukti bahwa $\overline{AQ}$, $\overline{BR}$, dan $\overline{CP}$ melalui satu titik yaitu titik O.

2. Garis Bagi

Garis Bagi segitiga adalah garis yang ditarik dari salah satu sudut pada segitiga sehingga membagi sudut tersebut menjadi dua bagian sama besar



Perhatikan ΔABC pada gambar berikut:

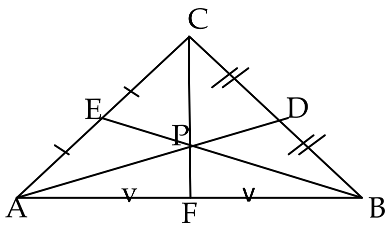
Karena garis $\overline{AD}$ adalah garis garis bagi dari $\angle BAC$, maka semua titik pada $\overline{AD}$ letaknya sama jauh dari $\overline{AC}$ dan $\overline{AB}$. Misalkan $\overline{AD}$ dan $\overline{BE}$ berpotongan di titik X, maka berarti X letaknya sama jauh dari $\overline{AC}$ dan $\overline{AB}$ dan juga dari $\overline{BA}$ dan $\overline{BC}$. Jadi X letaknya sama jauh dari $\overline{CA}$ dan $\overline{CB}$ yang berarti bahwa X terletak pada garis bagi dari $\angle ACB$ atau $\overline{CX}$ terletak pada garis bagi $\angle ACB$.

Dengan demikian terbuktilah bahwa ketiga garis bagi ini melalui satu titik.

3. Garis Berat

Garis berat segitiga adalah garis yang ditarik dari titik sudut suatu segitiga sehingga membagi sisi di depannya menjadi dua bagian sama panjang.

Perhatikan ΔABC pada gambar berikut:



Buktikanlah :

Ketiga garis berat dalam ΔABC di atas melalui satu titik, yang disebut titik berat segitiga.

Bukti :

Perhatikan ΔABC di atas.

AD dan BE adalah garis berat dalam ΔABC, maka BD = DC dan AF = BF.

Misalkan AD dan BE berpotongan di P, akan dibuktikan bahwa CF juga akan melalui P.

Perhatikan ΔCED dan ΔCAB

CE : CA = CD : CB = 2 : 1 (ΔEDC dan ΔABC sebangun)

Akibatnya AB⊥ED dan ED : AB = CE : CA = 1 : 2

∠DEP = ∠ABP (dalam berseberangan)

∠EPD = ∠APB (bertolak belakang)

Jadi ΔEPD sebangun dengan ΔAPB.

Akibatnya EP : PB = ED : AB = DP : AP = 1 : 2

Misal CF adalah garis berat yang melalui C dan memotong EB di P^1, maka dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa $EP^1 : P^1B = 1 : 2$.

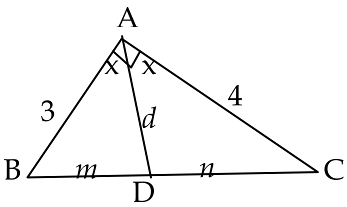
Dengan demikian diperoleh $EP = \frac{1}{3}$ EB dan $EP^1 = \frac{1}{3}$ EB atau $EP = EP^1$

Jadi terbukti bahwa CF adalah garis berat yang memotong EB di P.

Contoh 2.2

Segitiga ABC siku-siku di A dengan panjangAB = 3 cm, dan AC = 4 cm. Dari titik sudut A ditarik garis bagi AD. Tentukan panjang AD!

Penyelesaian:



Dengan Pythagoras, maka diperoleh panjang BC = 5 cm.

Menentukan panjang m dan n.

$\frac{m}{n} = \frac{3}{4}$, dari perbandingan ini maka,

$m = \frac{3}{7}$, BC = $\frac{3}{7} . 5 = \frac{15}{7}$.

$n = \frac{4}{7}$, BC = $\frac{4}{7} . 5 = \frac{20}{7}$.

Menentukan panjang AD

$d^2 = bc – mn$

$= 4 . 3 - \frac{15}{7} . \frac{20}{7}$

$= 12 - \frac{300}{49}$

$= \frac{588}{49} - \frac{300}{49}$

$= \frac{288}{49}$

$d = \sqrt{\frac{144\,.\,2}{49}}$

$= \frac{12}{7}\sqrt{2}$

Jadi, panjang garis bagi AD = $d = \frac{12}{7}\sqrt{2}$ cm.

LATIHAN 2.2

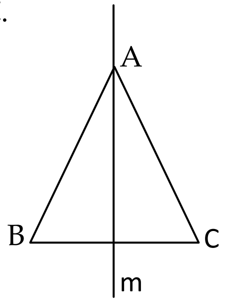
1. Sebuah segitiga ABC dengan AB = 5 cm, BC = 6 cm, dan AC = 7 cm. $\overline{AD}$ dan $\overline{BE}$ adalah garis tinggi. Hitunglah luas segitiga CDE!
2. Dalam segitiga ABC, panjang sisi AB = 4 cm, BC = 7 cm, dan AC = 8 cm. Garis berat-garis berat $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, dan $\overline{CF}$ saling berpotongan di titik P. Hitung panjang $\overline{AD}$, $\overline{BP}$, dan $\overline{PF}$!
3. Sebuah segitiga ABC dengan panjang AB = 21 cm, dan BC = 18 cm, dan AC = 12 cm. $\overline{CD}$ adalah garis bagi. E adalah titik tengah $\overline{BC}$. Hitunglah panjang $\overline{DE}$!

C. Teorema Garis Simetri segitiga:

Garis yang berisi garis-garis sudut dari segitiga sama kaki adalah garis simetri untuk segitiga

Bukti:

Gambarlah segitiga sama kaki ABC dengan sudut-sudut yang dibelah. Untuk membuktikan m adalah garis simetri untuk segitiga ABC.



Ada 3 hal yang diberikan. Masing-masing mengarah kepada kesimpulan yang digunakan kemudian dalam bukti.

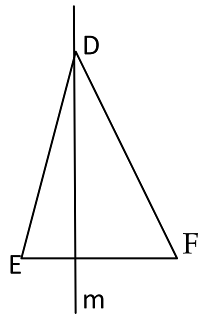
Pertama, karena m adalah garis sudut, berdasarkan teorema perpindahan sisi bila AB tercermin di atas m, bayangannya adalah AC. Jadi $r_m(B)$ pada AC memberikan $B^1 = r_m(B)$.

Kedua, Diberikan segitiga ABC dengan A adalah titik pada garis pemantul (refleksi). Jadi $r_m(A) = A$. Karena refleksi maka $AB^1 = AB$. Ketiga, diberikan segitiga ABC adalah segitiga sama dengan sudut-sudut A, Jadi AB = AC. Sekarang letakkanlah semua kesimpulan ini bersama-sama. Dengan sifat transitif kesetaraan $AB^1 = AC$.

Jadi B^1 dan C adalah titik arah pada AC, pada jarak yang sama dari A, maka $B^1 = C$. Itu adalah, $r_m(B) = C$. Oleh teorema Flip-Flop, $r_m(C) = B$.

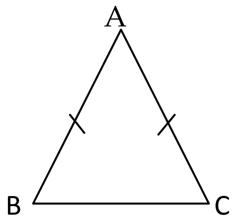
Jadi oleh teorema refleksi, $r_m(\Delta ABC) = \Delta BCB$, yang merupakan kondisi yang cukup untuk simetri segitiga garis m.

Pada segitiga yang tidak sama, tidak ada garis sudut yang merupakan garis simetri. Di bawah ini, anda dapat melihat bahwa gambar refleksi E di atas. Bisektris m bukan $F(r_m(E))$ ada di DF. Anda harus memperkirakan lokasinya.



Ingat bahwa segitiga sama kaki setidaknya memiliki dua sisi dengan panjang yang sama. Contoh: garis besar pada atap rumah, kerucut, banyak benda lainnya yang lancip ke satu titik. Mereka terjadi ketika titik akhir dari dua jari-jari tidak kolinier pada lingkaran jika digabungkan.

Sudut yang ditentukan oleh sisi yang sama dalam segitiga sama kaki disebut sudut-sudut. ($\angle A$ pada gambar di bawah ini).

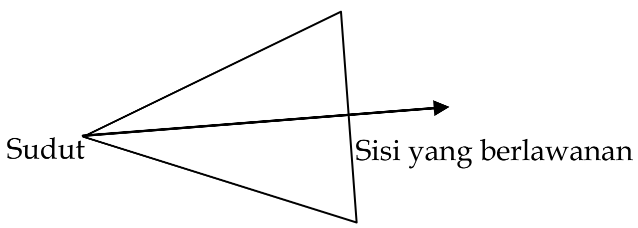


Dua sudut lainnya adalah sudut dasar $\angle B$ dan $\angle C$. Setiap sudut dasar dikatakan dibentuk oleh sisi yang sama panjang.
Sisi yang titik akhirnya adalah simpul dari sudut dasar disebut alas ($\overline{BC}$).

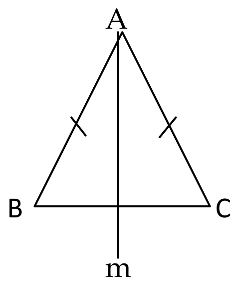
Bukti :

Panjang seringkali lebih mudah dipahami saat ditulis dalam paragraf daripada bila mereka berada dalam dua kolom format kesimpulan dan pembenaran.

Anda harus membaca buktinya dengan sangat lambat dan mengacu pada gambar saat gambar diberi nama.
Pengidentifikasian pada sisi berlawanan dengan sudut tertentu dilakukan untuk memperjelas bahwa sisi berlawanan dari sudut adalah independen dari jenis segitiga. Mungkin membantu untuk dicatat bahwa lawan adalah sisi yang berpotongan dengan sinar yang ditarik dari titik sudut pada bagian dalam sudut.



Segitiga samakaki ABC dengan garis bagi m dari A, karena $r_m(B) = C$, m adalah garis bolak balik $\overline{BC}$. Jadi m berisi median dari puncak A. Terbukti.



Teorema 2.1

Dalam segitiga sama kaki, garis bagi sudut, garis tegak lurus dari alas dan median ke pangkal menentukan garis yang sama.

Bahkan ada yang lebih. Dalam bukti teorema simetri segitiga sama kaki, karena $r_m(A) = A$, $r_m(B) = C$ dan $r_m(C) = B$. Kemudian $r_m(\angle ABC) = \angle ABC$ adalah teorema refleksi gambar. Dengan demikian $m\angle ABC = m\angle ACB$ karena refleksi membuat ukuran sudut menjadi sama. Kesimpulan ini merupakan teorema yang sangat penting.

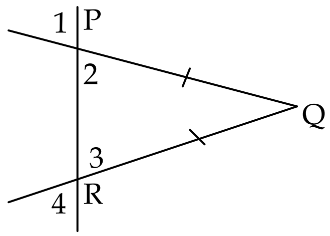
Teorema 2.2 (Segitiga Samakaki)

Jika sebuah segitiga memiliki 2 sisi yang sama, maka sudut yang berlawanan keduanya sama.

Teorema segitiga sama kaki berguna dalam bukti di mana anda harus meninggalkan sisi yang sama ke sudut yang sama.

Contoh 2.3

Diketahui : gambar segitiga PQR dengan $PQ = QR$



Buktikan $m\angle 2 = m\angle 4$!

Bukti:

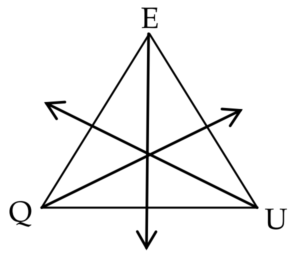
PQ = QR, berdasarkan teorema segitiga samakaki, $m\angle 2 = m\angle 3$. Sudut 3 dan 4 adalah bertolak belakang. Dengan demikian strategi sifat transitif dapat digunakan.

Nomor	Kesimpulan	Dasar Kebenaran
1	$m\angle 2 = m\angle 3$	teorema Δ sama kaki
2	$m\angle 3 = m\angle 4$	sudut bertolak belakang
3	$m\angle 2 = m\angle 4$	sifat persamaan transitif

Dalam segitiga sama sisi semua sisi memiliki panjang yang sama, sehingga setiap sisi segitiga sama sisi dapat dianggap sebagai besarnya, dan sudut-sudut itu adalah sudut puncak. Dengan demikian, dari teorema segitiga sama sisi, sebuah segitiga sama sisi memiliki 3 garis simetri. Garis-garis ini dapat dianggap sebagai garis-garis sudut atau garis-garis lurus dari sisi-sisinya. Gais berisi mediannya.

Contoh 2.4

Buktikan : Jika sebuah segitiga sama sisi, memiliki tiga sudut yang sama.



Diketahui : ΔQUE sama sisi

Buktikan : $m\angle Q = m\angle U = m\angle E$!

Bukti :

Ambil sisi yang sama dua sekaligus. Dari masing-masing pasangan, dapatkan dua sudut yang sama.

Tulis	Kesimpulan	Dasar kebenaran
1	$QE = EU$	definisi dari Δ sama sisi
2	$m\angle Q = m\angle U$	teorema Δ sama kaki
3	$EU = QU$	definisi dari Δ sama sisi
4	$m\angle Q = m\angle E$	teorema Δ sama kaki
5	$m\angle Q = m\angle U = m\angle E$	sifat transitif dari persamaan Segitiga (langkah 2 dan 4)

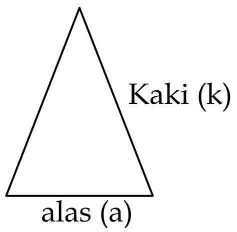
LATIHAN 2.3

Buktikan bahwa setiap segitiga sama sisi adalah segitiga sama sudut!

D. Menghitung Luas Segitiga

1. Menghitung Luas Segitiga Samakaki

Jika sebuah segitiga samakaki, diketahui panjang kaki dan alasnya



tinggi dapat dicari dengan Pythagoras:

$t^2 = k^2 - (\frac{1}{2}a)^2$

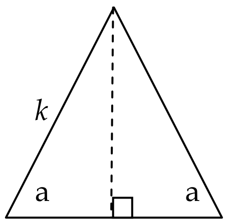
$\quad = k^2 - \frac{1}{4}a^2$

$t = \sqrt{(k^2 - \frac{1}{4}a^2)}$

L = $\frac{1}{2}$ at

L = $\frac{1}{2}$ a $\sqrt{(k^2 - \frac{1}{4}a^2)}$

Jika diketahui panjang kaki dan besar-besar sudut kaki-kaki segitiga



tinggi segitiga = k sin a

alas segitiga = 2k cos a

Luas = $\frac{1}{2}$. 2k cos a . k sin a

= k^2 sin a . cos a

Contoh 2.5

Sebuah segitiga sama kaki memiliki panjang kaki 20 meter dan sudut berhadapan dengan alasnya 74^0. Berapakah luas segitiga samakaki tersebut?

Penyelesaian:
Sudut di depan alas = 74^0, sehingga sudut pada kaki adalah $\frac{180-74}{2}$ = 53^0
k = 20
L = k^2 sin a . cos a
L = 20^2 . sin 53^0 . cos 53^0
= 400. sin 53^0 . cos 53^0
= 192,25
Jadi luas segitiga tersebuut adalah 192,25 m^2

2. Menghitung Luas Segitiga Sama Sisi

Biasanya dalam soal yang diketahui dari segitiga sama sisi adalah sisinya. Untuk mencari luas, maka kita menggunakan rumus luas segitiga sama sisi sebagai berikut:

L = $\frac{s^2}{4}$. $\sqrt{3}$

Pembuktian rumus:

$$L = \frac{1}{2}at$$

$$L = \frac{1}{2}s\sqrt{(s^2 - (\frac{1}{2}s)^2)}$$

$$L = \frac{1}{2}s\sqrt{(s^2 - \frac{1}{4}s^2)}$$

$$L = \frac{1}{2}s\sqrt{\frac{3}{4}s^2}$$

$$L = \frac{1}{2}s\,\frac{1}{2}s\sqrt{3}$$

$$L = \frac{1}{4}s^2\sqrt{3}$$

$$L = \frac{s^2}{4}.\sqrt{3}$$

Contoh 2.6

Sebuah segitiga samasisi memiliki sisi dengan panjang 10 cm. Tentukan luas segitiga tersebut!

Penyelesaian :
s = 10
Kita masukkan ke rumus luas segitiga

$$L = \frac{s}{4}.\sqrt{3}$$

$$= 25\sqrt{3}$$

Jadi luas segitiga tersebut adalah $25\sqrt{3}$

3. Menghitung Luas Segitiga Sebarang

Menghitung luas dari segitiga dengan panjang sisi yang berbeda-beda memang cukup rumit. Rumus luas yang dipakai tergantung pada informasi yang disediakan dalam soal. Jika diketahui semua panjang sisinya, kita gunakan rumus *Heron*. Jika diketahui dua sisi dan satu sudut apit, maka bisa menggunakan aturan luas dengan trigonometri. Jika diketahui hanya dua buah sudut dan satu sisi menggunakan kombinasi aturan sinus dan luas segitiga.

a. Diketahui semua sisinya

Untuk menghitung luas sebuah segitiga jika diketahui ketiga panjang sisinya menggunakan rumus *Heron*.

Rumusnya:

$$L = \sqrt{s}(s - a)(s - b)(s - c)$$

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

Contoh 2.7

Hitunglah luas sebuah segitiga sebarang yang memiliki panjang sisi 10 cm, 13 cm, dan 17 cm!

Penyelesaian:

$$s = \frac{1}{2}(10 + 13 + 17) = 20$$

$$L = \sqrt{s}(s - a)(s - b)(s - c)$$

$$= \sqrt{\ } 20(20 - 10)(20 - 13)(20 - 17)$$

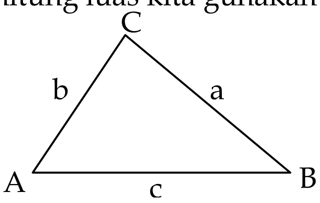
$$= \sqrt{\ } 20 \,.\, 10 \,.\, 7 .\, 3$$

$$= \sqrt{\ } 4200$$

$= 10\sqrt{42}\ m^2$

b. Diketahui Dua Sisi dan Sudut

Jika sebuah segitiga hanya diketahui sisi, sudut, sisi, untuk menghitung luas kita gunakan aturan sinus sbb:



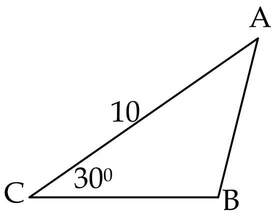
$L = \frac{1}{2}\, a\, b \sin C$

$L = \frac{1}{2}\, b\, c \sin A$

$L = \frac{1}{2}\, a\, c \sin B$

Contoh 2.8

Perhatikan gambar segitiga sebarang di bawah ini, hitung berapa luasnya?



Penyelesaian:

$L = \frac{1}{2}\, a\, b \sin C$

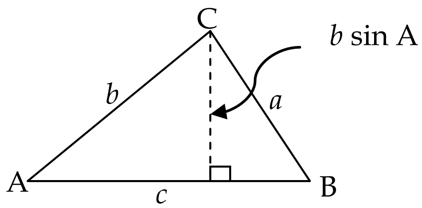
$= \frac{1}{2} .\ 7.\ 10.\ \sin 30^0$

$= \frac{1}{2} .\ 7.\ 10.\ \frac{1}{2}$

$= 17{,}5$

Bukti Rumus:

Rumus dasar untuk mencari luas segitiga adalah L = $\frac{1}{2}\,at$



Alas = c

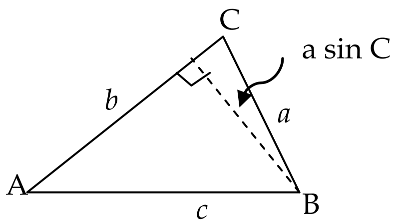
Tinggi = b sin A

Jadi rumus luas :

$$L = \frac{1}{2} \,.\, c \,.\, b \;\; \sin A$$

$$L = \frac{1}{2}\, b\, c \sin A$$

Misal sudut apit C :



Dari segitiga di atas nampak bahwa alas adalah b

$$t = a \sin C$$

$$L = \frac{1}{2} \,.\, b \,.\, a \,.\, \sin C$$

$L = \frac{1}{2} a\, b\ \sin C$

Analog di atas, jika sudutnya B sisi apitnya a dan c sehingga $L = \frac{1}{2}$ a c sin B

LATIHAN 2.4

1. Hitunglah luas segitiga sama sisi ABC dengan panjang sisi 12 cm!

2. Segitiga PQR, panjang PQ = 30 cm, PR = 12 cm, dan <RPQ = 53°. Berapakah luas segitiga PQR?

3. Hitunglah luas segitiga sebarang dengan panjang sisi 14 cm, 9 cm, dan 5 cm!

4. Diketahui luas segitiga sama kaki adalah 12 cm^2. Jika alasnya 6 cm, berapakah panjang sisi miringnya?

5. Diketahui sebuah petak sawah berbentuk segitiga dengan salah satu sudutnya bernilai 90^0. Jika sisi yang mengapit sudut 90^0 tersebut masing-masing adalah 35 m dan 40 m. Berapakah luas petak sawah tersebut?

BAB III
POLIGON

Geometri datar, merupakan studi tentang titik, garis, sudut, dan bangun-bangun geometri yang terletak pada sebuah bidang datar. Berbagai mekanisme peralatan dalam kehidupan nyata banyak diciptakan berdasarkan prinsip-prinsip geometri datar. Sebagai contoh sifat-sifat jajargenjang digunakan untuk membuat mekanisme pemindah rantai pada sepeda balap, pantograf (alat untuk memperbesar gambar), sifat belahketupat digunakan pada mekanisme pantograph kereta api listrik, konstruksi trapesium digunakan untuk sistem stir mobil, susunan segitiga yang kaku digunakan pada konstruksi bangunan dan jembatan, serta masih banyak lagi aplikasi yang lain. Tidak dapat dipungkiri, geometri berperan besar dalam membantu manusia memecahkan permasalahan yang dihadapi.

Bangun datar dalam pembahasan geometri adalah materi yang sangat luas dan memiliki banyak macam bentuk dan jenis. Bangun datar terdiri dari bangun yang dibatasi oleh poligon (segi banyak) yang merupakan sisinya dan terletak pada bidang datar. Secara umum, bangun datar atau segibanyak dapat kelompokkan menjadi : segitiga, segiempat, segilima, segienam, dan seterusnya. Akan tetapi jika didasarkan pada tingkat kemudahan atau kesederhanaan dalam mengenalinya dapat dikelompokkan menjadi dua jenis, yaitu bangun datar sederhana dan bangun datar tidak sederhana.

Poligon digunakan untuk mewakili bentuk objek gambar dengan cara merepresentasikan tepi obyek (*boundary*) dengan poligon. Pengenalan obyek gambar dapat dilakukan melalui pengenalan poligon. Poligon adalah bidang datar dengan tiga atau lebih sudut yang dikelilingi oleh sebuah segmen garis lurus yang membentuk sebuah kurva tertutup sederhana.

Poligon adalah rangkaian titik-titik secara berurutan, sebagai kerangka dasar pemetaan. Untuk kepentingan kerangka dasar, titik-titik poligon tersebut harus diketahui atau ditentukan posisinya atau koordinat. Poligon adalah gabungan ruas garis dari bagian yang bertemu hanya di titik akhir sehingga (1) sebanyak dua ruas garis bertemu di satu titik, dan (2) setiap ruas garis bertemu tepat dua ruas garis lainnya.

Poligon dinamai dengan memakai banyak dari sisinya. Contoh segitiga-3 sisi, segiempat-4 sisi, segilima-5 sisi, segienam-6 sisi, segitujuh-7 sisi, segidelapan-8 sisi. Sebuah poligon dengan sisi n dapat disebut segi-n. Diagonal dari poligon adalah ruas garis yang menghubungkan antara dua titik puncak dari segi banyak tersebut. Titik akhir dari $\overline{AC}$ adalah titik puncak dari poligon $ABCD$. $\overline{AC}$ adalah satu diagonal dari poligon.

Sebuah poligon adalah cembung (konveks) jika semua diagonal dari poligon terletak di dalam poligon itu sendiri. Setiap diagonal dari poligon ini seperti $\overline{PR}$, adalah terletak di dalam poligon. $PQRST$ adalah poligon cembung. Paling tidak terdapat satu diagonal dari poligon ini yang tidak terdapat dalam poligon. $GHIJK$ bukan merupakan poligon cembung. Segitiga dengan sisi yang kongruen memiliki nama khusus. Segitiga sama sisi adalah segitiga dengan semua sisi yang kongruen satu sama lain. $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$ Segitiga sama kaki adalah segittiga dengan dua sisi yang kongruen satu sama lain. A disebut sudut puncak. $\angle B$ dan $\angle C$ disebut sudut dasar. Segi banyak beraturan adalah segi banyak (poligon) dengan semua sisi kongruen satu sama lain dan semua sudut yang kongruen satu sama lain. $ABCD.EFGH$ adalah poligon beraturan beberapa poligon mempunyai beberapa jenis yang membuat semuanya poligon beraturan. Semua sisi mempunyai panjang yang sama. Semua sudut mempunyai besar yang sama.

Macam-macam poligon, antara lain:

1. Atas dasar titik ikat:
   a. Poligon terikat sempurna : poligon yang ujung-ujungnya terikat pada dua titik yang diketahui koordinatnya,
   b. Poligon terikat sepihak: poligon yang salah satu titik ujungnya terikat atau diketahui koordinatnya, poligon bebas: poligon yang ujung-ujungnya tidak terikat.
2. Atas dasar bentuk:
   a. Poligon Terbuka: poligon yang ujungnya tidak saling bertemu satu dengan yang lain,
   b. Poligon tertutup: poligon yang ujungnya saling bertemu (titik awal dan titik ahir menjadi satu) dan membentuk suatu loop atau kring,
   c. Poligon cabang: poligon yang merupakan cabang dari poligon yang lain.
3. Atas dasar hirarki dalam pemetaan:
   a. Poligon yang utama: poligon yang koordinat titik-titiknya diperoleh langsung dari penentuan koordinat titik lokal atau diikatkan langsung melalui pengukuran dari titik kontrol terdekat.
   b. Poligon cabang: poligon yang koordinat titik-titiknya diikatkan dari poligon utama.
4. Poligon adalah bidang datar tertutup oleh sejumlah penggal garis yangsaling berhubungan satu dengan yang lain pada ujung-ujungnya. Penggal- penggal garis itu tidak saling berpotongan.

Secara umum poligon dibedakan menjadi dua macam, yaitu poligon cembung (*convex*) dan poligon cekung (*concave*). Jika kita menarik garis lurus memotong sebuah poligon cembung maka paling banyak hanya dua sisi saja. Sebaliknya, pada poligon cekung garis lurus itu akan memotong lebih dari dua sisi.

Selain itu ada juga poligon yang disebut beraturan yaitu poligon yang semua sudutnya sama besar (ekuiangular) serta semua sisinya sama panjang(ekuilateral). Rumus-rumus umum poligon. Rumus-rumus ini menggunakan n sebagai jumlah sisinya dan S yang merujuk pada panjang sisinya. Rumus berlaku untuk poligon beraturan.

Luas poligon beraturan = $\frac{1}{2} n \sin\left(\frac{360°}{n}\right) S^2$

Jumlah sudut dalam poligon beraturan: $(n-2)180°$

Jumlah diagonal poligon beraturan $\frac{1}{2} n(n-3)$

Jumlah segitiga yang dapat dibuat di dalam sebuah poligon beraturan:

$$(n-2)$$

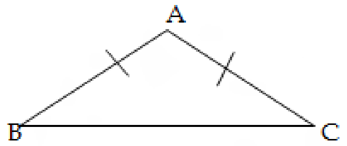
Nama-nama poligon:

Banyak sisi	Nama
3	Segitiga
4	Segiempat
5	Segilima/Pentagon
6	Segienam/Hexagon
7	Segitujuh/Heptagon
8	Segidelapan/Octagon
9	Segisembilan/Nanogon
10	Dekagon
11	Undecagon/Hendecagon/Segisebelas
12	Dodecagon/Segiduabelas
13	Tridecagon/Triskaidecagon
14	Tetradecagon/Tetrakaidecagon

A. Segitiga Samakaki

Segitiga sama kaki memiliki (paling sedikit) dua sisi sama panjang. Sudut yang dibentuk oleh sisi yang sama pada sebuah segitiga sama kaki disebut sudut puncak ($\angle A$ pada gambar di bawah). Kedua sudut yang lain disebut sudut alas ($\angle B$ dan $\angle C$). Masing-masing sudut alas dikatakan bersebrangan dengan sisi-

sisi yang sama. Sisi yang titik akhirnya adalah titik dari sudut alas disebut alas ($\overline{BC}$).



Gambar 3.1 Segitiga Samakaki

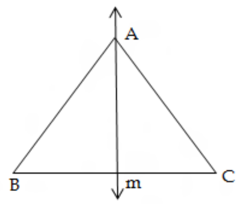
Teorema 3.1 (Teorema Simetri Segitiga Samakaki)

Garis yang memuat bisektor sebuah sudut puncak dari sebuah segitiga samakaki adalah sumbu simetri sebuah segitiga

Diketahui : Segitiga samakaki ABC

Bisektor m melalui sudut puncak A

Buktikan : m adalah sumbu simetri pada ΔABC

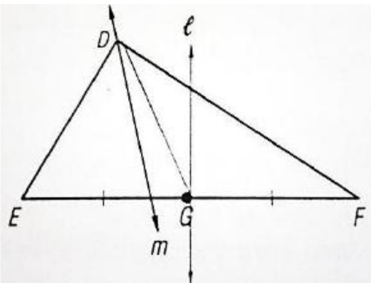


Bukti :

Langkah	**Pernyataan**	**Alasan**
1	ABC segitiga sama kaki	Diketahui
2	m bisektor sudut A	Diketahui
3	$r_m(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$	Teorema sisi beralih, 2
4	$r_m(B)\ pada\ \overrightarrow{AC}$	3
5	$r_m(B) = B'$	Dimisalkan
6	$r_m(A) = A$	2
7	$AB' = AB$	2,5, sifat refleksi
8	$AB = AC$	1
9	$AB' = AC$	Sifat transitif 7,8

Langkah	Pernyataan	Alasan
10	$B' = C$	4, 5, 9
11	$r_m(B) = C$	Sifat transitif 5, 10
12	$r_m(C) = B$	Teorema flip-flop, 11
13	$r_m(\Delta ABC) = \Delta ACB$	Teorema refleksi bangun, 6, 11, 12
14	m sumbu simetri pada ΔABC	13

Segmen yang menghubungkan sudut dari segitiga ke titik tengah dari sisi yang bersebrangan disebut median dari segitiga. Gambar di bawah ini merupakan contoh dari median, bisektor tegak lurus, dan sudut bisektor dari ΔDEF.



Gambar 3.2

m adalah bisektor $\angle EDF$
ℓ adalah bisektor tegak lurus terhadap $\overline{EF}$
$\overline{DG}$ adalah median dari titik D

Pada ΔDEF median, sudut bisektor, dan bisektor tegak lurus merupakan garis yang berbeda. Tetapi pada segitiga sama kaki median, sudut bisektor, dan bisektor tegak lurus merupakan garis yang sama.

Teorema 3.2
Pada segitiga sama kaki, bisektor dari sudut puncak, bisektor tegak lurus terhadap alas, dan median dari alas merupakan garis yang sama.

Diketahui : ΔABC samakaki
Buktikan : m = bisektor $\perp \overline{BC}$ = median terhadap $\overline{BC}$
Bukti :

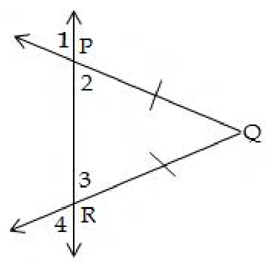
Langkah	Pernyataan	Alasan
1	ΔABC sama kaki	Diketahui
2	m adalah bisektor dari sudut A	Dimisalkan
3	$r_m(A) = A, r_m(B) = C,$ $r_m(C) = B$	Teorema simetri segitiga sama kaki
4	Jarak B ke m = jarak C ke m	2, 3
5	m = median terhadap $\overline{BC}$	4
6	$r_m(\angle ABC) = \angle ACB$	Teorema refleksi bangun, 2, 3
7	m$\angle ABC$= m$\angle ACB$	6
8	m = bisektor $\perp\overline{BC}$	4,7
9	bisektor $\perp\overline{BC}$ = median terhadap $\overline{BC}$	Sifat transitif, 5, 8
10	m = bisektor $\perp\overline{BC}$ = median terhadap $\overline{BC}$	5, 8, 9

Teorema 3.3 (Teorema Segitiga Sama Kaki)
Jika sebuah segitiga memiliki dua sisi yang sama, maka sudut yang bersebrangan dengan sisi tersebut merupakan sudut yang sama.

Bukti sebagai latihan.

Contoh 3.1

Diketahui : Gambar di samping dengan $PQ = QR$
Buktikan : $m\angle 2 = m\angle 4$



Bukti :

Langkah	Pernyataan	Alasan
1	$PQ = QR$	Diketahui
2	$m\angle 2 = m\angle 3$	Teorema Segitiga Sama Kaki, 1
3	$m\angle 3 = m\angle 4$	Teorema sudut bertolak belakang
4	$m\angle 2 = m\angle 4$	Sifat transitif dari persamaan (2, 3)

Pada segitiga sama sisi semua sisi memiliki panjang yang sama, jadi setiap sisi dari segitiga sama sisi dianggap sebagai alas, dan setiap sudutnya merupakan sudut puncak. Jadi dari Teorema Simetri Segitiga Sama Kaki, sebuah segitiga sama sisi memiliki tiga sumbu simetri. Garis ini dapat dianggap sebagai bisektor dari sudutnya atau bisektor tegak lurus terhadap sisinya. Garis tersebut memuat mediannya.

Contoh 3.2

Jika sebuah segitiga merupakan segitiga sama sisi, maka memiliki tiga sudut yang sama

Diketahui : ΔQUE sama sisi

Buktikan : $m\angle Q = m\angle U = m\angle E$

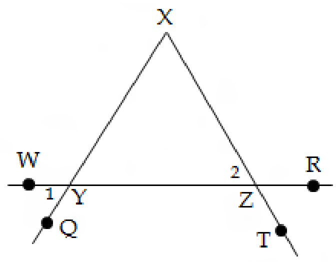
Bukti :

Langkah	Pernyataan	Alasan
1	ΔQUE sama sisi	Diketahui
2	$QE = EU$	Definisi segitiga sama sisi, 1
3	$m\angle Q = m\angle U$	Teorema segitiga sama kaki, 2
4	$EU = QU$	Definisi segitiga sama sisi, 1
5	$m\angle Q = m\angle E$	Teorema segitiga

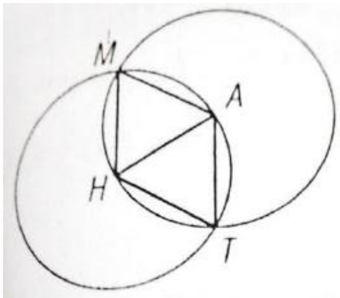
Langkah	Pernyataan	Alasan
		sama kaki, 4
6	$m\angle Q = m\angle E = m\angle U$	Sifat Transitif pada persamaan (3 & 5)

LATIHAN 3.1

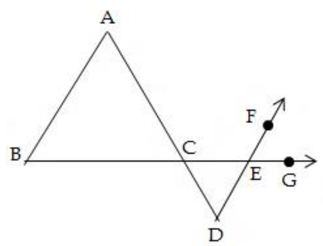
1. Gunakan gambar di bawah ini (Petunjuk: Gunakan paling sedikit satu teorema dari sub bab ini sebagai alasan)
   Diketahui: $XY = XZ$
   Buktikan: $m\angle 1 = m\angle 2$



2. Nyatakan benar atau salah dan beri alasan
   a. Jika segitiga sama kaki, maka merupakan segitiga sama sisi
   b. Jika segitiga sama sisi, maka merupakan segitiga sama kaki
3. Pada gambar di bawah, $\odot A$ dan $\odot H$ masing-masing memiliki radius AH dan $\odot A \cap \odot H = \{M, T\}$
   Apakah ΔAHM sama sisi, sama kaki tapi tidak sama sisi, atau tidak sama kaki tidak juga sam sisi? Berikan alasan.



4. Diketahui: Seperti gambar di bawah
   $\overline{AD}$ dan $\overline{BE}$ berpotongan di C
   $AB = AC$ dan $DC = DE$
   Buktikan: $m\angle B = m\angle CED$



5. Gunakan penggaris, busur, dan jangka
   a. Gambar segitiga sama sisi. Gambar ketiga mediannya. Ketiga median tersebut seharusnya memotong pada satu titik yang disebut centroid dari segitiga. Ukur panjang mediannya dan jarak dari centroid ke setiap sudut. Apa yang dapat Anda simpulkan?
   b. Gambar segitiga sama kaki yang tidak sama sisi. Ulangi langkah pada bagian **a** untuk segitiga tersebut
   c. Gambar segitiga sembarang. Ulangi langkah pada bagian **a** untuk segitiga tersebut
   d. Buat kesimpulan dengan menulis sebuah atau dua buah kalimat yang diawali dari "Pada segitiga apapun, ketiga mediannya...."

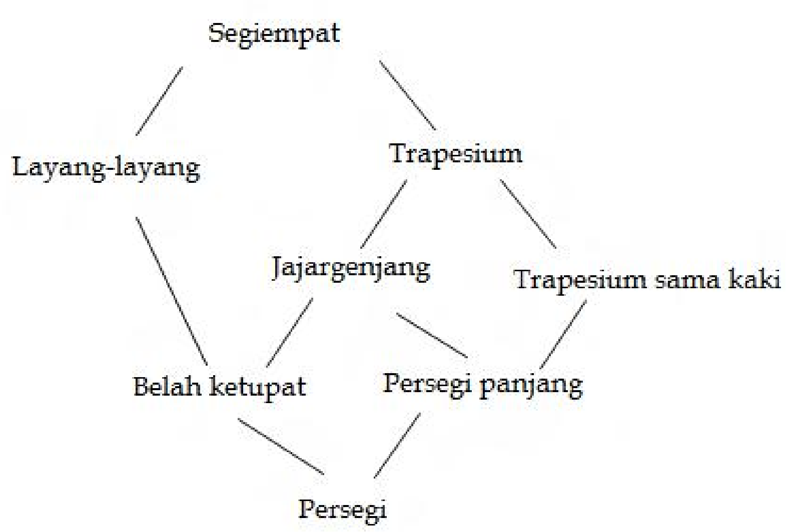
B. Jenis-jenis Segiempat

Definisi

1. Sebuah segiempat merupakan jajargenjang jika dan hanya jika kedua pasang sisi yang bersebrangan merupakan sisi yang sejajar.
2. Sebuah segiempat merupakan belah ketupat jika dan hanya jika keempat sisinya sama panjang.
3. Sebuah segiempat merupakan Persegipanjang jika dan hanya jika memiliki empat sudut siku-siku.
4. Sebuah segiempat merupakan persegi jika dan hanya jika memiliki empat sisi yang sama panjang dan empat sudut siku-siku.
5. Sebuah segiempat merupakan layang-layang jika dan hanya jika memiliki dua pasang berbeda dari sisi berurutan yang sama panjang.
6. Sebuah segiempat merupakan trapesium jika dan hanya jika memiliki **paling sedikit satu** pasang sisi yang sejajar.

7. Sebuah trapesium merupakan sama kaki jika dan hanya jika memiliki sepasang sudut alas yang sama besar.

Dari definisi di atas dapat dibuat hierarki sebagai berikut



Berpikir Tingkat Tinggi

Buatlah dua definisi yang ekuivalen dengan definisi di atas. Dan buktikan bahwa definisi yang dibuat ekuivalen

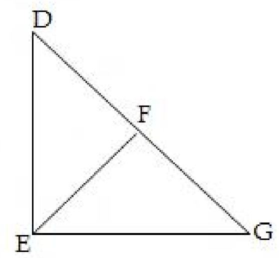
Berpikir Kritis

Buatlah diagram hubungan bangun datar jika trapezium didefinisikan segiempat yang mempunyai **tepat** sepasang sisi yang sejajar. Beri argumen setiap keputusan yang diambil.

LATIHAN 3.2

1. Nyatakan benar atau salah dari pernyataan di bawah ini dan beri alasan
   a. Setiap persegi merupakan belahketupat
   b. Setiap belahketupat merupakan persegi
   c. Setiap persegi merupakan layang-layang
   d. Setiap layang-layang adalah belah ketupat
   e. Jika segiempat merupakan trapesium, maka merupakan jajargenjang
   f. Sifat persegi merupakan sifat layang-layang
   g. Sifat trapesium merupakan sifat jajargenjang

2. Diketahui : ΔDEF sama kaki dengan sudut puncak F
   ΔEFG sama kaki dengan sudut puncak F
   Buktikan : DF= FG



C. Konjektur (Dugaan)

Konjektur (dugaan) adalah tebakan atau pendapat peserta didik. Untuk menyatakan bahwa sebuah konjektur benar atau salah, matematikawan biasanya memulai dengan memeriksa contoh. Untuk konjektur tentang bangun geometri, ini berarti membuat sketsa/gambar dan dieksplorasi. Jika sebuah contoh ditemukan, maka konjektur benar. Jika contoh tidak temukan, ada bukti bahwa konjektur tidak benar. Tetapi untuk konjektur dapat diterima sebagai kebenaran pada setiap kasus, itu harus dibuktikan.

Contoh 3.3

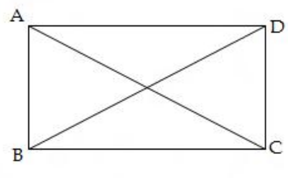
Tunjukkan bahwa konjektur "Diagonal dari jajargenjang memiliki panjang yang sama" merupakan konjektur yang salah

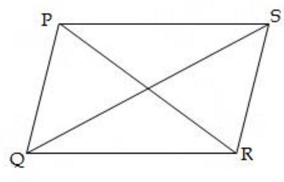
Diketahui : Jajargenjang $ABCD$ dan $PQRS$

Buktikan : $AC = BD$ dan $PR = QS$

Bukti :

Untuk membuktikan hal tersebut kita dapat mengambil contoh ingkar. Pada jajargenjang $ABCD, AC = BD$. Tetapi pada jajargenjang $PQRS, PR \neq QS$. Dapat dilihat pada gambar di bawah.



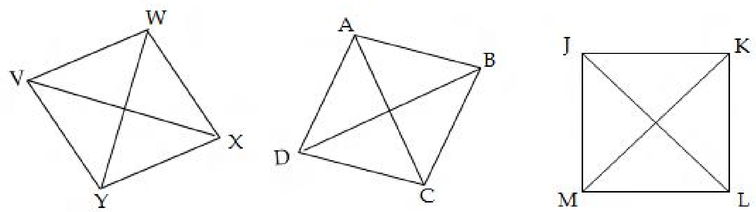


Contoh 3.4

Buatlah konjektur tentang diagonal sebuah belahketupat

Gambar beberapa belahketupat (semakin terlihat berbeda, semakin baik), dan gambar diagonalnya.

Karena Anda tidak diminta untuk menduga tentang sifat yang spesifik dari diagonal, ukurlah panjang diagonal dan sudut yang dibentuk diagonal tersebut. Beberapa perhitungan disajikan dalam tabel (satuan mm)



Belah ketupat	ABCD	JKLM	VWXY
Panjang diagonal	AC= 18 BD= 34	JL= 26 KM= 26	VX= 36 WY= 20

Belah ketupat	ABCD	JKLM	VWXY
Panjang dari titik perpotongan dari diagonal ke titik sudut	EA= 9 EC= 9 ED= 17 EB= 17	NJ= 13 NL= 13 NM= 13 NK= 13	ZV= 18 ZX= 18 ZW= 10 ZY= 10
Sudut yang dibentuk pada titik perpotongan dari diagonal	m∠AED= 90 m∠AEB= 90 m∠BEC= 90 m∠DEC= 90	m∠JNK= 90 m∠KNL= 90 m∠LNM= 90 m∠MNJ= 90	m∠VZW= 90 m∠WZX= 90 m∠XZY= 90 m∠YZV= 90

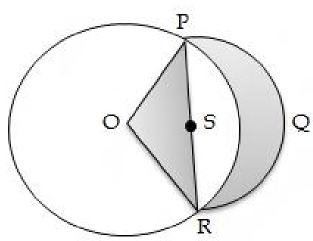
Sekarang lihat pola yang terlihat pada seluruh belahketupat. Berikut ini merupakan konjektur yang masuk akal

1. Diagonal saling membagi satu sama lain, memotong pada satu titik yaitu titik tengah dari setiap segmen.
2. Diagonal saling tegak lurus.

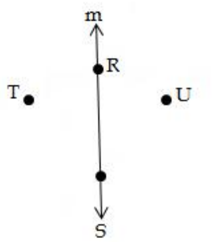
LATIHAN 3.3

1. Ubah konjektur di contoh 1 agar bernilai benar dan buktikan
2. Buatlah sebuah konjektur tentang sudut yang dibentuk dari diagonal dan sisi dari belah ketupat. Ukur sudutnya terlebih dahulu. Catat pada tabel seperti contoh 2.
3. Uji konjektur ini paling sedikit tiga kasus: Diagonal-diagonal dari trapesium sama kaki memiliki panjang yang sama. Apakah konjektur tersebut benar?
4. Jika titik tengah dari keempat sisi dari sebuah Persegipanjang dihubungkan, bangun yang terbentuk merupakan persegi. Buktikan apakah konjektur tersebut benar atau salah dan beri alasan.
5. Jika titik tengah dari dua sisi segitiga dihubungkan, maka segmen tersebut sejajar dengan sisi ketiga. Buktikan apakah konjektur tersebut benar atau salah dan beri alasan.

6. Pada gambar di bawah, jika PQR merupakan setengah lingkaran berpusat di S. Titik O merupakan titik pusat dari lingkaran besar. $m\angle POR = 90$. Maka luas dua daerah yang diarsir adalah sama. Buktikan konjektur tersebut benar atau salah dan beri alasan.



7. Diketahui: Gambar di bawah, $r_m(T) = U$
   Buktikan: RUST adalah layang-layang



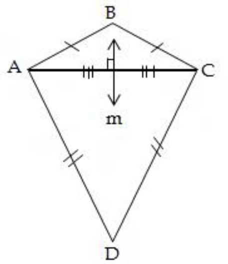
8. Diketahui:
   ΔABC adalah segitiga sama kaki dengan sudut puncak C
   ΔBCD adalah segitiga sama kaki dengan sudut puncak C
   Titik C pada $\overline{AD}$
   Buktikan: $\overline{BC}$ adalah median pada ΔABD

D. Sifat Layang-Layang

Titik dari sisi yang sama pada layang-layang disebut ujung dari layang-layang. Pada layang-layang di bawah, titik B dan D merupakan ujung. Semua titik pada belahketupat adalah ujung.

Teorema 3.4 (Teorema Simetri Layang-Layang)
Garis yang memuat ujung dari layang-layang merupakan sumbu simetri dari layang-layang tersebut

Diketahui : Layang-layang $ABCD$



Buktikan : $\overline{BD}$ adalah sumbu simetri dari $ABCD$

Bukti :

Langkah	Pernyataan	Alasan
1	$AB = BC$	Definisi dari ujung layang-layang
2	$AD = DC$	Definisi dari ujung layang-layang
3	ΔABC sama kaki	Definisi segitiga sama kaki, 1
4	ΔADC sama kaki	Definisi segitiga sama kaki, 2
5	m bisektor ⊥ terhadap $\overline{AC}$	Dimisalkan
6	$r_m(A) = C$	Definisi refleksi, 5
7	$r_m(C) = A$	Teorema flip-flop, 6
8	m memuat B dan D	3, 4, 5
9	$r_m(B) = B$	Definisi refleksi, 8
10	$r_m(D) = D$	Definisi refleksi, 8
11	$r_m(ABCD) = CBAD$	Teorema refleksi bangun, 6, 7, 9, 10
12	$\overleftrightarrow{BD}$ sumbu simetri dari ABCD	Definisi sumbu simetri, 11

Diagonal yang ditentukan oleh ujung ($\overline{BD}$ di atas) disebut diagonal simetri dari layang-layang. Garis $\overleftrightarrow{BD}$ adalah bisektor tegak lurus terhadap diagonal layang-layang yang lain. Perhatikan dari pembuktian langkah 6, 7, 9, dan 10, $r_m(\angle ABD) =$

$\angle CBD$ dan $r_m(\angle ADB) = \angle CDB$ dengan menggunakan Teorema Refleksi Bangun. Sehingga $\overline{BD}$ membagi $\angle ABC$ dan $\angle ADC$ sama besar. Ini diringkas dalam teorema di bawah

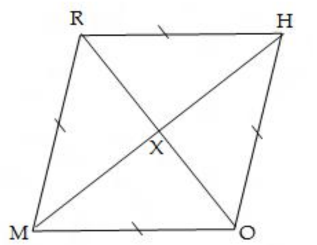
Teorema 3.5 (Teorema Diagonal Layang-Layang)

Diagonal simetri dari layang-layang merupakan 69isector tegak lurus terhadap diagonal yang lain dan membagi dua sudut sama besar pada ujung-ujung dari layang-layang

Bukti sebagai latihan!

Teorema diagonal layang-layang berlaku pada belah ketupat dan persegi. Sifat penting yang lain dari layang-layang adalah dua sudut yang tidak dibagi oleh diagonal simetri merupakan sudut yang sama besar.

Belahketupat merupakan layang-layang, semua sisinya dapat berujung. Sehingga belah ketupat memiliki dua diagonal simetri. Pada belahketupat RHOM di bawah, $\overline{RO}$ bisektor tegak lurus terhadap $\overline{HM}$ dan $\overline{HM}$ bisektor tegak lurus terhadap $\overline{RO}$. Sehingga X merupakan titik tengah dari $\overline{HM}$ dan $\overline{RO}$



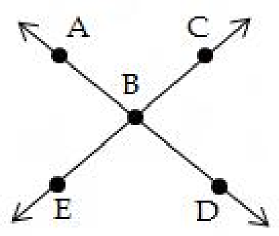
Teorema 3.6 (Teorema Simetri Belah Ketupat)

Setiap belahketupat memiliki dua sumbu simetri, itu merupakan diagonalnya.

Bukti sebagai latihan!

LATIHAN 3.4

1. Diketahui layang-layang ABCD dengan ujung B dan D. Buktikan bahwa m∠A= m∠C
2. Beri contoh untuk menunjukkan bahwa konjektur ini salah: Jika titik tengah dari sisi-sisi sebuah belahketupat dihubungkan satu sama lain, bangun yang dihasilkan yaitu persegi
3. Jika konjektur pada soal nomor 2 kata "persegi" diubah menjadi "Persegipanjang", Apakah konjektur tersebut benar? Jelaskan
4. Diketahui belahketupat RHOM. Buktikan bahwa sudut yang bersebrangan dari belah ketupat merupakan sudut yang sama besar.
5. Gunakan gambar di samping untuk menjawab
   a. Jika $m\angle ABC = 8x - 7$ dan $m\angle EBD = 3x + 68$. Tentukan nilai x
   b. Jika m∠ABC= $2y + 3$ dan $m\angle CBD = 4y + 9$. Tentukan $m\angle ABC$

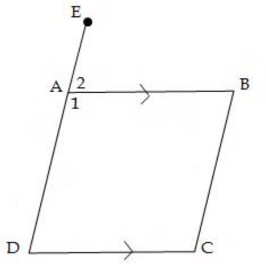


E. Sifat-Sifat Trapesium

Karena hierarki dari segiempat, beberapa sifat trapesium berlaku pada jajargenjang, belahketupat, persegipanjnag, persegi, dan trapesium samakaki.

Teorema 3.7 (Teorema Sudut Trapesium)
Pada trapesium, sudut yang berurutan antara sepasang sisi sejajar merupakan suplemen.

Diketahui : Trapesium $ABCD$



Buktikan : ∠1 dan ∠D bersuplemen

Bukti :

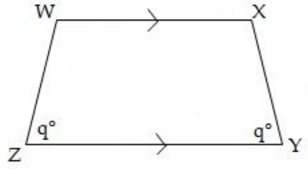
Langkah	Pernyataan	Alasan
1	Trapesium ABCD	Diketahui
2	$\overline{AB} // \overline{DC}$	Definisi trapesium, 1
3	$\overline{AD}$ diperpanjang melalui A ke titik E	Dibuat
4	∠EAB dinamai ∠1 ∠BAD dinamai ∠2	Dibuat
5	m∠1 + m∠2= 180	Sudut pelurus, 3
6	m∠2 = m∠D	2
7	m∠1 + m∠D= 180	Subtitusi 5 ke 6
8	m∠1 dan m∠D bersuplemen	7

Teorema 3.8

Pada trapesium sama kaki, kedua pasang sudut alas merupakan sudut yang sama besar

Diketahui : Trapesium $XWYZ$ sama kaki

Buktikan : $m\angle Z = m\angle Y$ dan $m\angle W = m\angle X$

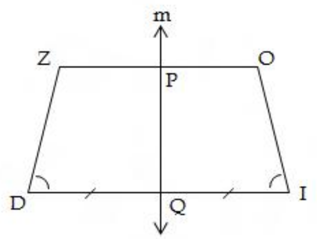


Bukti :

Langkah	Pernyataan	Alasan
1	Trapesium XWYZ sama kaki dengan alas ZY	Diketahui
2	m∠Z = m∠Y	1, Definisi trapesium sama kaki
3	m∠Z = m∠Y= q	Dimisalkan
4	m∠W = 180−q	Teorema sudut trapesium, 1, 3
5	m∠X = 180−q	Teorema sudut trapesium, 1, 3
6	m∠W = m∠X	Sifat transitif dari 4 dan 5

Teorema 3.9 (Teorema Simetri Trapesium Sama Kaki)
Bisektor tegak lurus terhadap salah satu alas dari trapesium sama kaki merupakan bisektor tegak lurus terhadap alas yang lain dan sumbu simetri dari trapesium

Diketahui: $ZOID$ trapesium sama kaki
m bisektor tegak lurus terhadap $\overline{ID}$
Buktikan: m bisektor tegak lurus terhadap $\overline{ZO}$ dan m sumbu simetri $ZOID$



Bukti :

Langkah	Pernyataan	Alasan
1	ZOID trapesium sama kaki	Diketahui
2	m∠I = m∠D	Definisi trapesium sama kaki, 1

Langkah	Pernyataan	Alasan
3	m bisektor tegak lurus terhadap $\overline{ID}$	Diketahui
4	$r_m(D) = I$	3
5	$r_m(I) = D$	4, teorema flip-flop
6	$r_m(\overrightarrow{DZ}) = \overrightarrow{IO}$	1,3, 4, 5
7	$r_m(Z)$ terletak pada $\overrightarrow{IO}$	6
8	$\overline{ZO} // \overline{DI}$	1
9	$\overline{ZO}$ ⊥m	Teorema sejajar-tegak lurus, 3, 8
10	$r_m(Z)$ terletak pada $\overleftrightarrow{ZO}$	Definisi refleksi, 9
11	$\overline{IO}$ memotong $\overline{ZO}$ di O	1
12	$r_m(Z) = O$	7, 10, 11
13	$r_m(O) = Z$	12, Teorema flip-flop,
14	$r_m(ZOID) = OZDI$	Teorema refleksi bangun, 4, 5, 12, 13
15	m sumbu simetri dari ZOID	14
16	m bisektor tegak lurus terhadap $\overline{ZO}$	12, 15

Corollary sebuah teorema adalah teorema yang mudah untuk dibuktikan berdasarkan teorema pertama

Teorema 3.10 (Teorema Trapesium Sama Kaki)
Pada trapesium sama kaki, sisi selain sisi alas merupakan sisi yang sama panjang

Diketahui : Trapesium $ZOID$ sama kaki
Buktikan : $ZD = OI$

Bukti :

Langkah	Pernyataan	Alasan
1	Trapesium ZOID sama kaki	Diketahui
2	m sumbu simetri dari ZOID	1
3	$r_m(Z) = O$	Teorema simetri trapesium sama kaki. 1. 2
4	$r_m(D) = I$	Teorema simetri trapesium sama kaki, 1, 2
5	ZD = OI	3,4

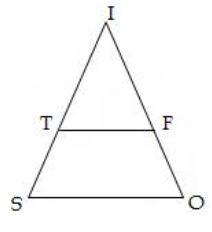
Persegipanjang dapat dipandang sebagai trapesium sama kaki dari dua cara. Kedua sisi sejajar dapat menjadi alas. Sehingga corollary teorema simetri trapesium sama kaki yang lain sebagai berikut

Teorema 5.11 (Teorema Simetri Persegipanjang)
Setiap Persegipanjang memiliki dua sumbu simetri, bisektor tegak lurus terhadap sisi tersebut

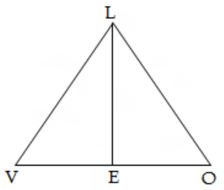
Bukti sebagai latihan

LATIHAN 3.5

1. Diberikan ΔISO sama kaki dengan IS = IO dan $\overline{TF}//\overline{SO}$. Buktikan bahwa SOFT merupakan trapesium sama kaki



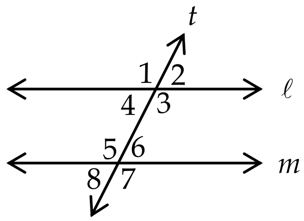
2. Diberikan ABCD merupakan trapesium sama kaki dengan alas $\overline{AB}$ dan $\overline{DC}$
   a. Buktikan AC = BD (Petunjuk: Gunakan simetri dan refleksi)
   b. Nyatakan hasilnya dengan kalimat sebagai teorema
3. Nyatakan pernyataan di bawah ini benar atau salah, beri alasan
   a. Diagonal dari trapesium sama kaki sama panjang
   b. Diagonal dari Persegipanjang sama panjang
   c. Diagonal dari persegi sama panjang
4. Diberikan : Segitiga sama kaki LOV dengan sudut puncak L dan $\overline{LE}$ merupakan median



   Berikan alasan pada setiap langkah pembuktian berikut
   a. LO = LV
   b. LE = LE
   c. E merupakan titik tengah dari $\overline{OV}$
   d. EV = OE
5. Uji konjektur ini. Jika titik tengah dari sisi-sisi sebuah trapesium sama kaki dihubungkan secara berurutan, bangun yang dihasilkan merupakan belah ketupat.

F. Sudut Dalam Berseberangan

Pelajaran ini melengkapi hirarki segiempat dengan membuktikan bahwa semua belah ketupat adalah jajar genjang. Untuk melakukannya, pertama-tama perlu untuk menggambarkan dan memberikan beberapa sifat garis sejajar.

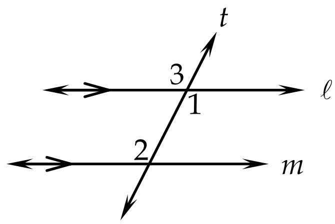


Bila dua garis dipotong oleh transversal, keempat sudut di antara garis ($\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, dan $\angle 6$ pada Gambar di atas) disebut **sudut dalam.** Empat sudut lainnya disebut **sudut luar.** Sudut 4 dan 6 disebut **sudut dalam berseberangan** (berada di sisi lain dari transversal), seperti juga sudut 3 dan 5.

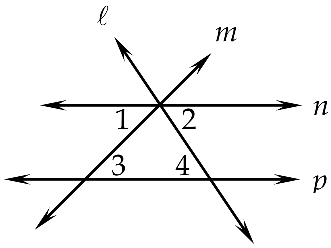
Sudut dalam berseberangan seperti sudut pada huruf Z. Jika bagian atas dan bawah Z sejajar, sudut terlihat sama ukurannya. Buktinya bergantung pada Postulat Garis Sejajar.

Teorema 3.12
Jika dua garis sejajar dipotong oleh transversal, maka sudut dalam berseberangan sama ukurannya.

Bukti:

Langkah	Pernyataan	Alasan
1	Terdapat tiga garis berbeda $\ell, m,$ dan t	Dikonstruksi
2	$\ell // m$, t transversal 	Premis
3	$m\angle 1 = m\angle 3$	Teorema Sudut Bertolak

Langkah	Pernyataan	Alasan
		Belakang
4	m$\angle$3 = m$\angle$2	Teorema Sudut Sehadap
5	m$\angle$1 = m$\angle$2	Akibat 3 dan 4



Contoh 3.5

Pada gambar di samping, $n // p$. Jika m$\angle$3 = 43 dan m $\angle$4 = 57, cari ukuran sudut 1 dan 2.

Penyelesaian:

Sudut 1 dan 3 adalah sudut dalam berseberangan dengan m sebagai transversal. Jadi, m$\angle$1 = m$\angle$3 = 43. Demikian pula sudut 2 dan 4 adalah sudut dalam berseberangan dengan ℓ sebagai transversal. Jadi m$\angle$2 = m$\angle$4 = 57.

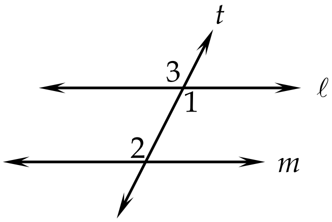
Kebalikan dari Teorema 3.12 juga benar.

Teorema 3.13

Jika dua garis dipotong oleh transversal dan membentuk sudut dalam berseberangan dengan ukuran yang sama, maka kedua garis tersebut sejajar.

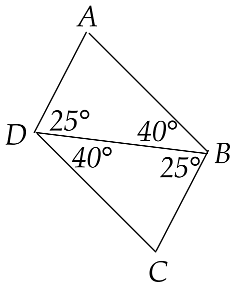
Bukti:

No.	Pernyataan	Alasan
1	Terdapat tiga garis berbeda ℓ, m, dan t	Dikonstruksi

No.	Pernyataan	Alasan
2	t transversal 	Premis
3	m$\angle$1 = m$\angle$2	Premis Tambahan
4	m$\angle$3 = m$\angle$1	Teorema Sudut Bertolak Belakang
5	m$\angle$3 = m$\angle$2	Akibat 3 dan 4
6	$\ell // m$	Akibat 2 dan 5

Contoh 3.6

Diberikan gambar di samping (tidak digambar sesuai skala) dengan sudut yang ditandai. Benar atau salah?



a. $\overline{AB} // \overline{CD}$

b. $\overline{AD} // \overline{BC}$

Penyelesaian:

a. **Benar.** $\overline{BD}$ berfungsi sebagai transversal untuk sisi $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ (Catatan: Z dibentuk oleh $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, dan $\overline{DC}$). $\angle ABD$ dan $\angle BDC$ adalah sudut dalam berseberangan dengan ukuran yang sama. Jadi, $\overline{AB} // \overline{CD}$.

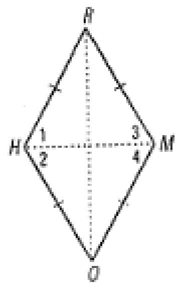
b. **Salah.** $\overline{BD}$ **adalah** transversal, namun sudut dalam berseberangan $\angle ADB$ dan $\angle CBD$ memiliki ukuran yang berbeda. Jadi, $\overline{AD}$ tidak sejajar dengan $\overline{BC}$.

Teorema 3.13 memungkinkan Anda menyelesaikan hirarki segiempat.

Teorema 5.14

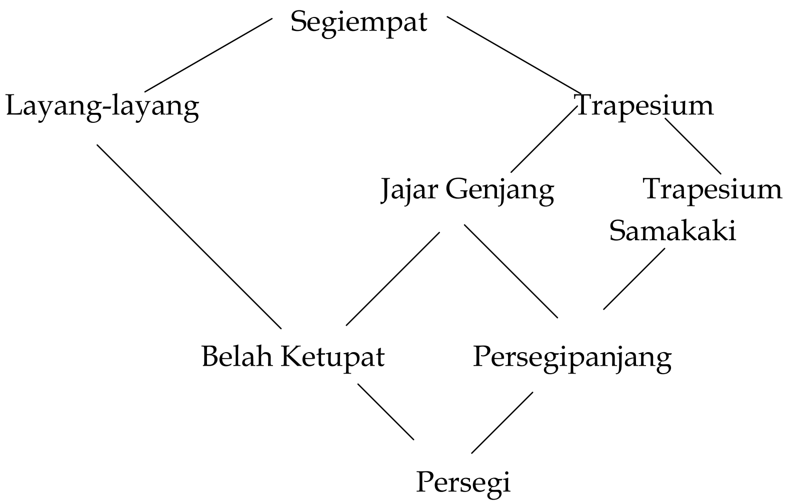
Jika segiempat adalah belahketupat, maka segiempat itu adalah jajargenjang.

Bukti:

Langkah	Pernyataan	Alasan
1	*RHOM* belah ketupat 	Premis
2	$\overline{HM}$ adalah diagonal simetri untuk layang-layang *RHOM* dengan ujung *H* dan *M*	Premis Tambahan
3	$\angle 1$ dan $\angle 3$ adalah pencerminan dari $\angle 2$ dan $\angle 4$	Akibat 2
4	m$\angle 1$ = m$\angle 2$ m$\angle 3$ = m$\angle 4$	Akibat 3
5	Δ *HRM* adalah segitiga sama kaki, m$\angle$ 1 = m$\angle 3$	Premis
6	m$\angle 1$ = m$\angle 4$	Akibat 4 dan 5
7	$\angle 1$ dan $\angle 4$ adalah sudut dalam	Premis

Langkah	Pernyataan	Alasan
	berseberangan untuk $\overline{HR}$ dan $\overline{OM}$ yang dibentuk oleh $\overline{HM}$ transversal	
8	$\overline{HR} // \overline{OM}$	Teorema 2
9	ΔHOM adalah segitiga sama kaki, m$\angle 2$ = m$\angle 4$	Premis
10	m$\angle 2$ = m$\angle 3$	Akibat 4 dan 9
11	$\angle 2$ dan $\angle 3$ adalah sudut dalam berseberangan untuk $\overline{RM}$ dan $\overline{HO}$ yang dibentuk oleh $\overline{HM}$ transversal	Premis
12	$\overline{RM} // \overline{HO}$	Teorema 2
13	*RHOM* jajar genjang	Akibat 8 dan 12

Kami menyebut hubungan antar-segiempat sebagai Teorema Hirarki Segiempat.



Teorema 3.15 (Hirarki Segiempat)

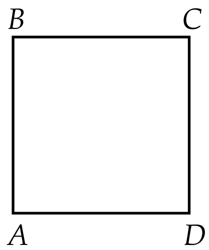
Jika ada bangun yang memiliki tipe apa pun pada hirarki, bangun tersebut merupakan bangun dari semua tipe yang terhubung di atasnya.

Teorema Hirarki Segiempat sangat membantu dalam banyak pembuktian.

Contoh 3.7

Jika $ABCD$ persegi, maka $\overline{AB} // \overline{CD}$.

Bukti:

No.	Pernyataan	Alasan
1	$ABCD$ persegi 	Premis
2	$ABCD$ jajar genjang	Teorema 4
3	$\overline{AB} // \overline{CD}$	Akibat 2

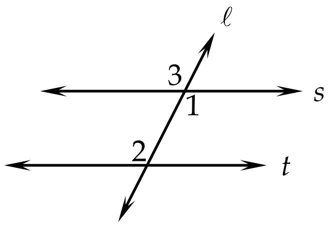
LATIHAN 3.6

1. Jika sebuah bangun adalah trapesium sama kaki, maka bangun tersebut adalah persegi.
2. Diberikan: $ABCD$ belah ketupat

   Buktikan : $\overline{AD} // \overline{BC}$
3. Lihat gambar untuk Pertanyaan 1 - 4.
   a. Pasangan sudut mana yang menurut Anda merupakan sudut **luar berseberangan**?

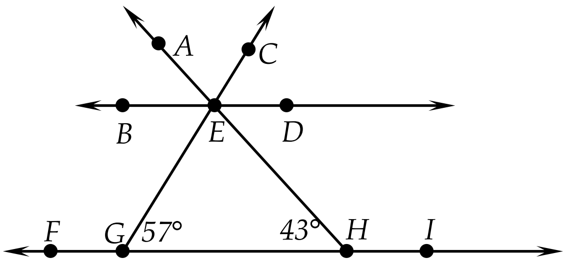
b. Jika $\ell // m$, apakah pasangan sudut tersebut sama ukurannya, jumlahnya 180°, atau jumlahnya 90°?

4. Lengkapi bukti Teorema ini.
   Diberikan: m$\angle$1 = m$\angle$2.
   Buktikan : $s//t$.



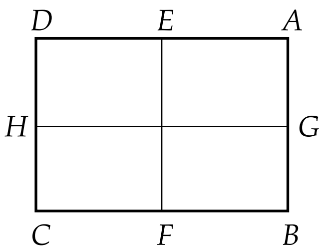
No.	Pernyataan	Alasan
1	m$\angle$3 = m$\angle$1	….
2	m$\angle$3 = m$\angle$2	….
3	$s//t$	….

5. Pada gambar di bawah ini, $\overline{BD} // \overline{FI}$. Jika m$\angle EGH$ = 43 dan m$\angle EHG$ = 57, cari ukuran semua sudut lainnya pada gambar berikut.



6. Satu sudut trapesium samakaki memiliki ukuran 7 kali lipat dari yang lain.
   a. Cari semua ukuran sudut pada bangun tersebut.
   b. Gambar sebuah contoh.
7. Titik A = (0, 0), B = (10, 0), C (7, 3), dan D = (2, 3).
   Bangun apa $ABCD$?
8. Jika Anda mengambil selembar kertas persegi dan melipatnya ke dirinya sendiri di sepanjang diagonal, bangun apa yang terbentuk?

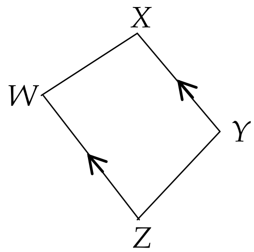
9. $\overline{EF}$ dan $\overline{GH}$ adalah garis simetri untuk ABCD pada gambar di sebelah kiri.



a. $r_{\overleftrightarrow{GH}}(A) = \ldots$.

b. $r_{\overleftrightarrow{EF}}(ABCD) = \ldots$.

10. Pada gambar di samping, WXYZ adalah trapesium sama kaki dengan sudut dasar X dan Y. Jika $m\angle X = -2q + 71$ dan $m\angle Y = -5q + 32$, tentukan $m\angle X$.



G. Jumlah Ukuran Sudut Dalam Segibanyak

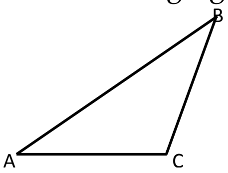
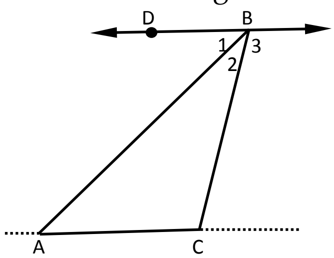
Pada awal tahun 1800-an, Karl Friederich Gauss seorang matematikawan terkenal bertanya-tanya apakah Teorema Geometri Euclidean benar dalam jarak yang jauh. Dan dia mengukur sudut antara tiga pohon di Jerman untuk melihat jika dijumlahkan hasilnya 180˚. Gauss menemukan bahwa jumlah sudut yang diukurnya sangat dekat ke 180˚ dalam batas keakuratan instrumennya. Dia telah lama memeriksa kebenaran sebuah teorema yang diketahui orang-orang Yunani kuno. Mungkin juga sudah lama Anda ketahui. Di sini dia membuktikannya.

Teorema 3.16 (Jumlah Sudut Segitiga)
Jumlah sudut dalam segitiga adalah 180˚.

Pernyataan dari Teorema jumlah sudut segitiga dapat ditulis ulang dengan syarat:

Jika gambar adalah segitiga, maka jumlah sudut dalamnya adalah 180˚.

Bukti:

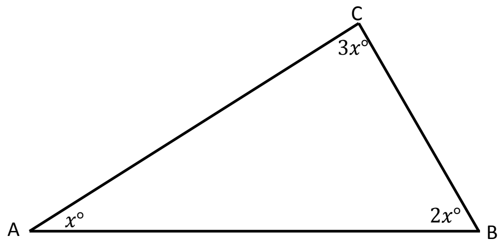
Langkah	Pernyataan	Alasan
1	Diketahui segitiga ABC 	Premis
2	Gambar $\overline{BD}$ dengan $m\angle 1 = m\angle A$ 	Dikonstruksi
3	$\overline{BD} // \overline{AC}$	Teorema
4	$m\angle 3 = m\angle C$	Teorema
5	$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle DBC$	Postulat Penjumlahan Sudut
6	$m\angle DBC + m\angle 3 = 180^0$	Teorema Kesejajaran Garis
7	$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^0$	Langkah 5 dan 6
8	$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$	Langkah 2, 4, 5, 6, dan 7

Contoh 3.8

Dalam ΔABC, perbandingan sudut dalam 1 : 2 : 3. Ini berarti sudutnya memiliki ukuran $1x$, $2x$, dan $3x$. Tentukanlah ukuran sudut tersebut.

Penyelesaian:

Gambar ΔDEF



Dari Teorema jumlah sudut Segitiga, $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$.

Substitusi:

$x + 2x + 3x = 180^0$

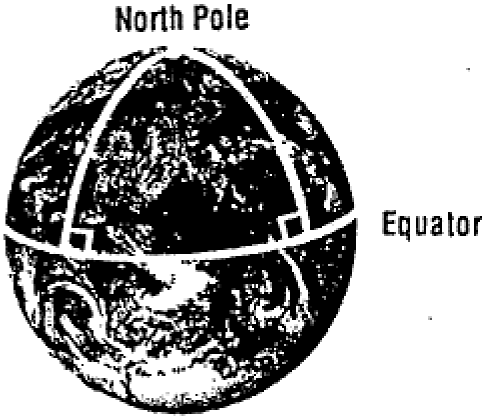
$\Leftrightarrow 6x = 180^0$

$\Leftrightarrow x = 30^0$

Jadi $m\angle A = 30^0$, $m\angle B = 60^0$, dan $m\angle C = 90^0$.

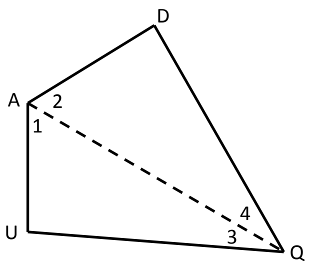
Periksa kembali: 30˚, 60˚, dan 90˚. Perbandingan ukuran sudutnya 30˚: 60˚: 90˚ atau 1 : 2 : 3.

Dalam sebuah pesawat, dua garis saling tegak lurus pada garis yang sama tidak dapat berpotongan membentuk segitiga. Tapi ini bisa terjadi pada bola. Permukaan bumi dapat didekati sebagai bola. Sebuah segitiga yang dibentuk oleh dua garis bujur (garis utara-selatan) dan garis ekuator adalah sama kaki dengan dua sudut dasar yang benar. Karena ada sudut ketiga di Kutub Utara, ukurannya bertambah menjadi lebih dari 180˚. Dengan demikian Teorema Dua Garis Saling Tegak Lurus maupun Teorema Jumlah Sudut dalam Segitiga tidak bekerja di permukaan bumi.



Dalam pesawat, Teorema Jumlah Sudut dalam Segitiga memungkinkan jumlah pengukuran sudut-sudut segibanyak cembung dihitung. Segiempat adalah tempat yang jelas untuk memulai.

Bukti:

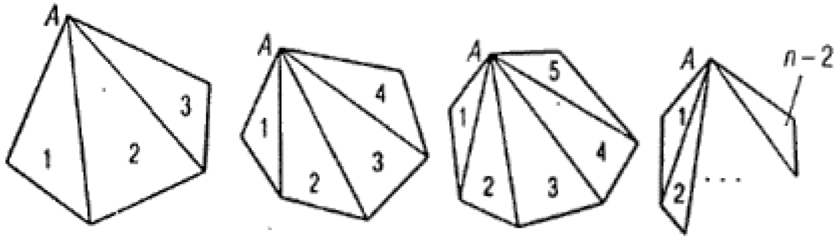
Langkah	**Pernyataan**	**Alasan**
1	Diberikan S = jumlah sudut $QUAD$ pada gambar di bawah 	Premis
2	$S = m\angle U + m\angle A + m\angle D + m\angle Q$	Premis
3	Gambar $\overline{AQ}$ membagi $\angle A$ dan $\angle Q$ menjadi 4 sudut kecil.	Dikonstruksi
4	$S = m\angle U + (m\angle 1 + m\angle 2) + m\angle D$ $+ (m\angle 3 + m\angle 4)$	Langkah 2, 3, dan Postulat Jumlahan

Langkah	Pernyataan	Alasan
		Sudut Segitiga
5	$S = (m\angle U + m\angle 1 + m\angle 3) + (m\angle 2 + m\angle 4 + m\angle D)$	Langkah 4
6	$S = 180° + 180°$	Teorema Jumlah Sudut dalam Segitiga
7	$S = 360°$	Terbukti

Pernyataan ini membuktikan:

Teorema 3.17 (Jumlah Ukuran Sudut Segiempat)
Jumlah ukuran sudut dalam segiempat adalah 360°.

Jumlah ukuran sudut dari segi-n dapat ditentukan dengan cara yang sama. Perhatikan segibanyak di bawah ini.



Segi-5 Segi-6 Segi-7 Segi-n

Tiap titik puncak diberi nama A. Gambar diagonal dari titik A, untuk segi-5, terbentuk 3 diagonal. Jadi jumlah sudut segi-n adalah $3 \cdot 180$ (180° untuk tiap segitiga).
Untuk segi-6, ada 4 segitiga; untuk segi-7 ada 5 segitiga; dan untuk segi-n ada (n – 2) segitiga. Jumlah dari sudutnya sebagai berikut.

Segi-6	$4 \cdot 180$
Segi-7	$5 \cdot 180$
Segi-n	$(n - 2) \cdot 180$

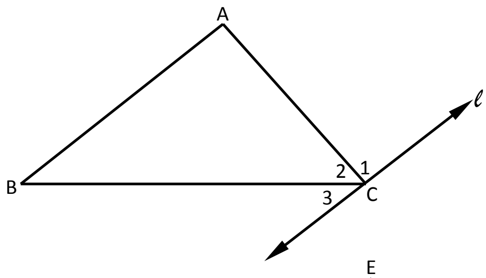
Pernyataan ini dapat digunakan untuk membuktikan Teorema Jumlah Sudut Segi-n.

Teorema 3.18 (Jumlah Ukuran Sudut Segi-n)

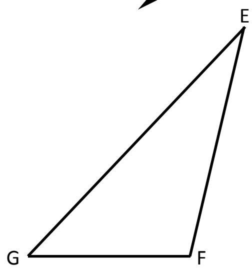
Jumlah ukuran sudut bangun datar segi-n adalah (n-2) $\cdot$ 180.

LATIHAN 3.7

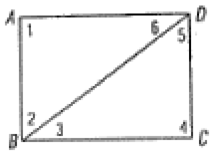
1. Berikut ini adalah gambar yang berbeda. Buktikan Teorema Jumlah Ukuran Sudut Segitiga, diketahui pada gambar $l//\overline{AB}$. Berikan alasan pada setiap pernyataan.



Untuk nomor 2 dan 3, perhatikan ΔEFG di sebelah bawah.

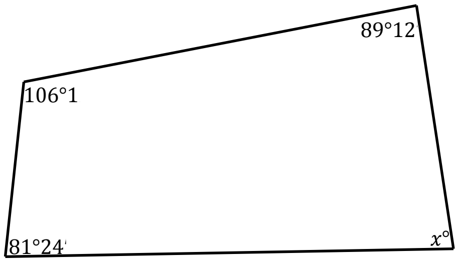


2. Jika $m\angle F = 115°$ dan $m\angle G = 40°$ tentukan $m\angle E$.
3. Jika perbandingan sudut dalam segitiga adalah 1 : 3 : 5, tentukan ukuran sudutnya?
4. Diketahui persegipanjang ABCD di bawah. Isilah titik-titik dengan bilangan.
   a. $m\angle 1 = \ldots$
   b. $m\angle 2 = m\angle$ ...
   c. $m\angle 2 + m\angle 6 = \cdots$
   d. $m\angle 3 + m\angle 5 = \cdots$
   e. $m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 = \cdots$
   f. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 = \cdots$

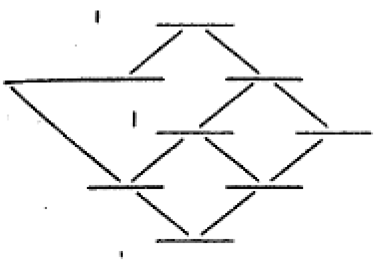


5. Pada segiempat, titik sudutnya HIJK, $m\angle H + m\angle I + m\angle J + m\angle K = \ldots$
6. Nyatakan Teorema Jumlah Ukuran Sudut Segi-n.
7. a. Berikan contok keadaan yang menyatakan jumlah ukuran sudut segitiga tidak 180°.
   b. Disebut geometri apa kondisi tersebut?

8. Mengacu pada gambar segibanyak pada halaman sebelumnya.
   a. **Benar atau salah?** Setiap sisi dari segibanyak yang yang tidak terdapat titik puncak A merupakan bagian dari segitiga.
   b. Berapa banyak sisi segi-n yang tidak terdapat titik A?
   c. Dalam berapa banyak segitiga yang …
9. Seorang surveyor mengukur sudut dalam derajat dan menit. Dengan 60 menit dalam satu derajat. Berapakah nilai x?



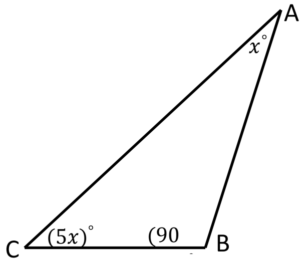
10. Gambarlah dari ingatan, hirarki dari segiempat. Diagram di bawah sebagai petunjuknya.



LATIHAN 3.8

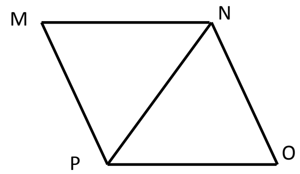
Untuk no 1 dan 2, benar atau salah?

1. Setiap persegi adalah persegipanjang.
2. Setiap layang-layang memiliki dua garis simetri.
3. Lihat gambar ΔABC di samping!
   a. Tentukan A.
   b. Tentukan ukuran ketiga sudut segitiga di atas.
      (catatan: ΔABC tidak digambar secara akurat



4. Sudut W dari trapesium sama kaki WXYZ dengan alas WX adalah 100^0.
   a. Gambarkan trapesium tersebut.
   b. Tentukan besar sudut-sudut lainnya.
5. Tentukan jumlah ukuran sudut segi sepuluh beraturan .

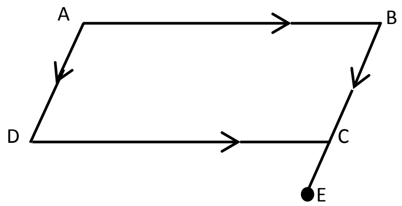
Untuk soal no 6 – 8, lihat gambar di bawah ini.



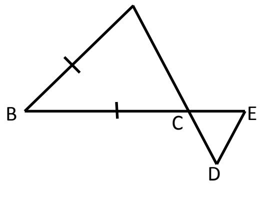
ΔMNP dan ΔNOP adalah segitiga sama sisi

6. Tentukan ukuran setiap sudut dari:
   a. $\angle M$
   b. $\angle MNO$
7. **Benar atau salah?** Segiempat MNOP adalah belah ketupat. Jelaskan jawabanmu.
8. a. Berapa jumlah garis sumbu simetri yang dimiliki segiempat MNOP?
   b. Beri nama $\overline{MO}$ dan $\overline{NP}$

9. ABCD di bawah ini adalah jajar genjang. Berikan penjelasan tentang kesimpulan berikut.



   Teorema Sudut Trapesium
   a. $m\angle A + m\angle B = 180$
   b. $m\angle D + m\angle DCE = 180//$
      garis $\Rightarrow AIA$
10. Diberikan $AB = BC$
    Buktikan $m\angle A = m\angle ECD$



BAB IV
KONGRUENSI SEGITIGA

A. Menggambar segitiga

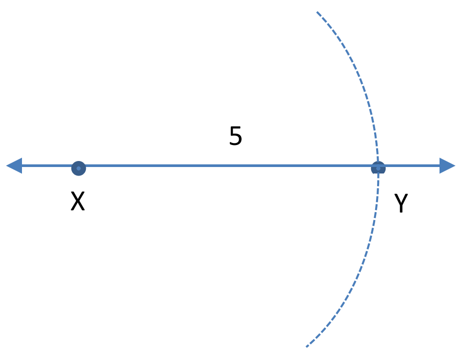
Menggambarkan segitiga dengan sisi 2cm, 4cm, dan 5cm dapat menggunakan gambar otomatis yang memudahkan untuk memasukkan panjang sisi dan besar sudut, kemudian selanjutnya akan tergambar sendiri segitiga tersebut. Jika kamu tidak memiliki software gambar otomatis tersebut, maka berikut adalah algoritma untuk mengkonstruksi segitiga dengan tiga panjang sisi yang memenuhi ketaksamaan Segitiga.

Contoh 4.1

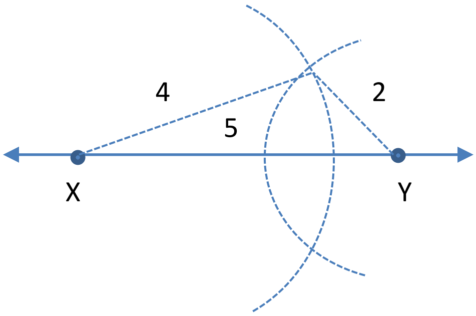
Konstruksi segitiga dengan panjang 2, 4, dan 5

Penyelesaian:

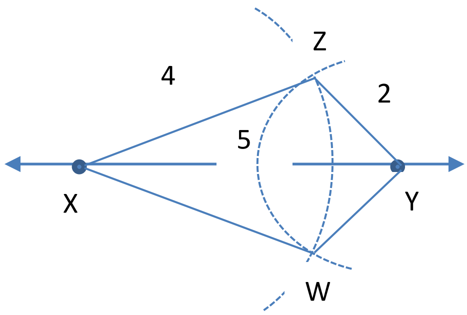
Langkah 1. Konstruk sebarang garis. Pilih titik X pada garis.
Langkah 2. Konstruk $\odot X1$, dengan jari-jari $XY = 5$
Langkah 3. Konstruk $\odot X2$, dengan jari-jari 4
Langkah 4. Konstruk $\odot Y$ dengan jari-jari 2
Langkah 5. $\odot X2 \cap \odot Y = (Z, W)$ (lingkaran tidak akan memotong jika ketaksamaan segitiga dilanggar)
Langkah 6. ΔXYZ dan ΔXYW merupakan segitiga dengan panjang 2, 4, dan 5.



Langkah 1 – 2



Langkah 3 – 4



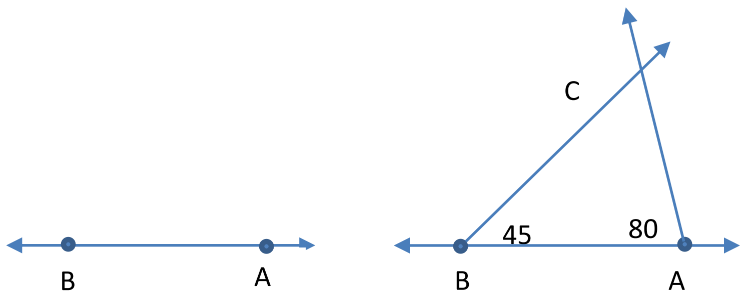
Langkah 5 – 6

Contoh 4.2

Gambarkan segitiga ABC di mana $m\angle A$ = 80, $m\angle B$ = 45, dan $m\angle C$ = 55.

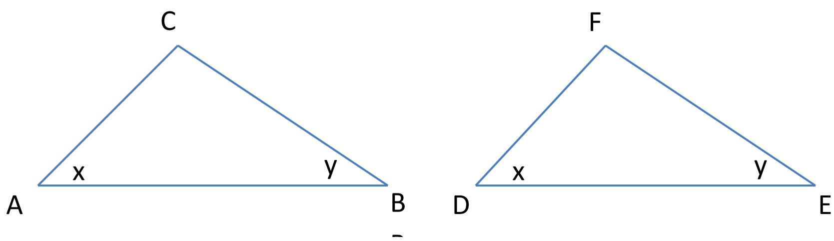
Penyelesaian:

Pertama, cek $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$. Lalu untuk memulai, gambar satu garis yang memuat satu sisi segitiga. Gambar $\overleftrightarrow{AB}$, lalu gambarkan sudut 45 pada titik B ke kiri dan sudut 80 dari titik A ke kanan. Hasilnya akan didapat segitiga ABC.



Teorema 4.1

Jika dua segitiga memiliki dua pasang sudut yang kongruen, maka pasangan sudut yang ketiga juga kongruen.



Diketahui: $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E$

Buktikan $\angle C \cong \angle F$

Pembuktian menggunakan aljabar. Karena pasangan sudut tersebut kongruen, maka besar sudutnya sama.

Misal $m\angle A = m\angle D = x$, dan $m\angle B = m\angle E = y$

Sesuai teorema jumlah segitiga pada ΔABC maka

$$x + y + m\angle C = 180$$

$$m\angle C = 180 - x - y$$

dengan cara yang sama pada ΔDEF maka

$$x + y + m\angle F = 180$$

$$m\angle F = 180 - x - y$$

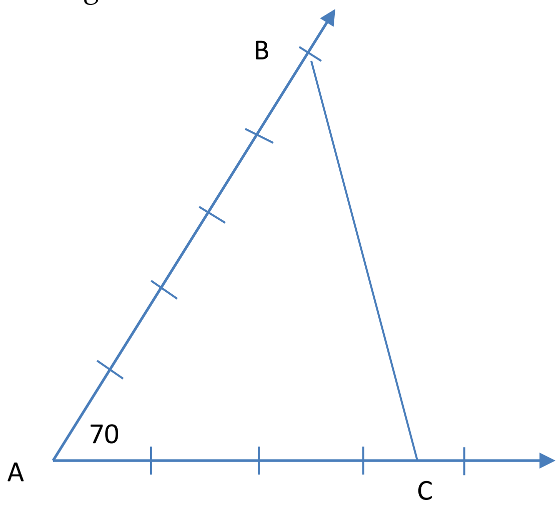
menggunakan sifat transitif dari persamaan, maka $m\angle C = m\angle F$
jadi pasangan sudut ketiga kongruen yaitu $\angle C \cong \angle F$.

Contoh 4.3

Pada segitiga $ABC, m\angle A$ = 70, AB = 5m, dan AC = 3,5m. buat skala gambar menggunakan cm sebagai ganti satuan panjang meter.

Penyelesaian:

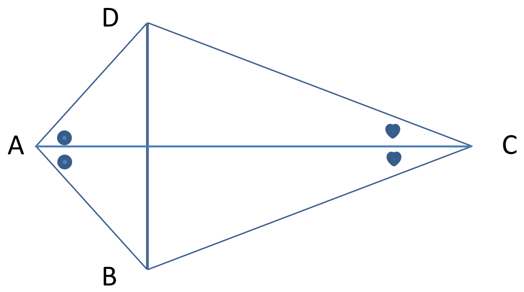
Pertama, gambarkan sudut 70. Misalkan 1cm pada gambar sama dengan 1m pada gambar sebenarnya. Lalu, beri tanda 5cm pada sisi kedua dan 3,5cm pada sisi ketiga. Selanjutnya hubungkan titik-titik tersebut.



Dari ketiga contoh tersebut maka dapat disimpulkan
4.1 tiga sisi S-S-S
4.2 tiga sudut Sd-Sd-Sd
4.3 dua sisi dan satu sudut apit S-Sd-S

LATIHAN 4.1

1. Gambarkan segitiga dengan panjang sisi 3cm, 4cm, dan 5cm.
2. Gambarkan segitiga dengan ukuran sudut 110 dan 30.
3. Pada segiempat ABCD, $\overline{AC}$ merupakan bisector $\angle DAB$. Mengapa $\angle B \cong \angle D$?

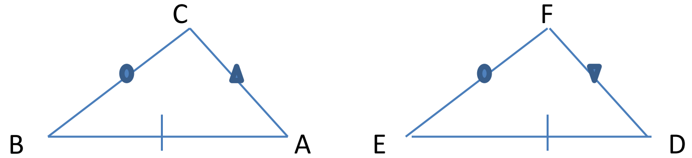


4. Sebidang tanah berbentuk segitiga yang dibatasi panjang sisi AB = 250 kaki, BC = 200kaki, dan AC = 300 kaki.
5. Jika diketahui $\Delta QZP \cong \Delta KRA$. Daftarlah enam pasang bagian yang berkorespondensi.

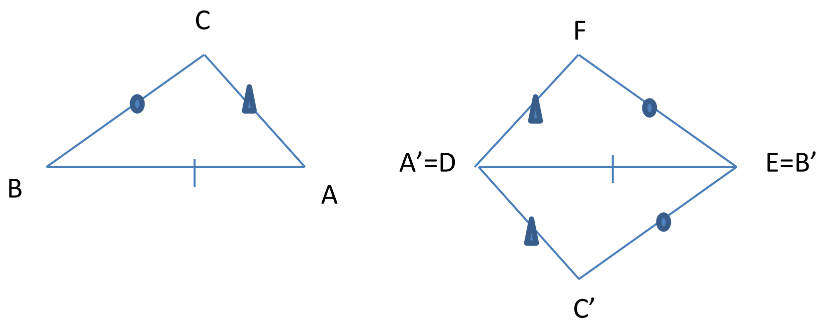
B. Teorema Kongruensi Segitiga

Teorema 4.2 (Kongruensi S-S-S)
Jika pada dua segitiga, semua pasangan sisinya kongruen, maka segitiga-segitiga tersebut juga kongruen.

Bukti:
Diketahui $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AC} \cong \overline{DF}$



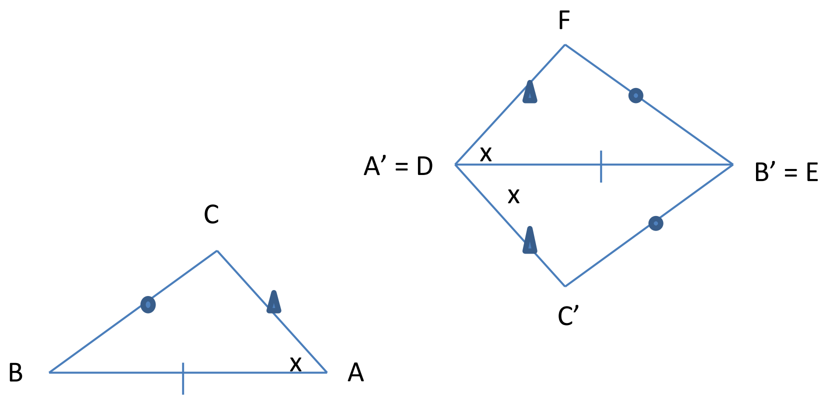
Pembuktian menggunakan sifat transitif kongruensi.
Untuk membuktikan $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, maka akan dibuktikan setiap segitiga kongruen pada segitiga yang ketiga. Segitiga yang ketiga terletak sebagai bayangan ΔABC dengan menggunakan isometri.
Karena $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, maka ada isometri yang memetakan $\overline{AB}$pada $\overline{DE}$ maka ada bayangan yang kongruen $\Delta A'B'C'$ dari ΔABC yang berbagi sisi dengan ΔDEF. Selanjutnya $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ dan $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ maka sesuai sifat transitif kongruensi $\overline{A'C'} \cong \overline{DF}$ dan $\overline{B'C'} \cong \overline{EF}$. Dengan demikian $\Delta A'B'C'$ dan ΔDEF membentuk layang-layang, dimana sisi yang bersekutu $\overline{DE}$ adalah diagonal simetri dari layang-layang ini.



Karena layang-layang ini refleksif-simetris pada $\overleftrightarrow{DE}$, maka ΔDEF adalah bayangan refleksif dari $\Delta A'B'C'$. Sehingga jika seluruh pasangan sisi dari ΔABCdan ΔDEF kongruen, maka ΔABCdapat dipetakan pada ΔDEFdengan isometri.
Jadi sesuai definisi kongruensi $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Teorema 4.3 (Kongruensi S-Sd-S)
Jika pada dua segitiga, pasangan dua sisi dan sudut apitnya kongruen, maka kedua segitiga tersebut kongruen.

Bukti:
diketahui $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, dan $\angle A \cong \angle FDE$
Karena $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ maka dengan pembuktian S-S-S, petakan $\overline{AB}$ pada $\overline{DE}$. $\Delta C'DF$ adalah segitiga sama kaki dan $\overrightarrow{DE}$ merupakan bisector sudut D. Karena teorema segitiga samakaki yang simetris, maka bayangan refleksif dari C' pada $\overleftrightarrow{DE}$ adalah F dan bayangan refleksi dari $\Delta A'B'C'$ adalah ΔDEF. Hal ini mengakibatkan $\Delta A'B'C' \cong \Delta DEF$. Karena $\Delta A'B'C'$ adalah bayangan dari ΔABC menggunakan isometric, maka $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, sehingga sesuai sifat transitif kongruensi $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

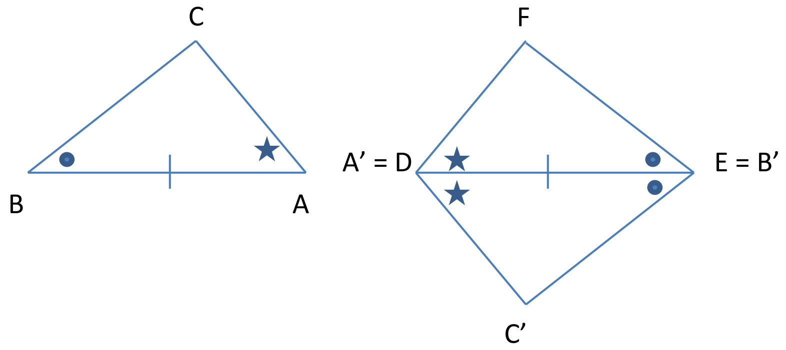


Teorema 4.4 (Kongruensi Sd-S-Sd)
Jika pada dua segitiga, pasangan dua sudut dan satu sisi apit kongruen, maka kedua segitiga tersebut kongruen.

Bukti:

Diketahui $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle FDE$, dan $\angle B \cong \angle FED$.

Perhatikan bayangan $\Delta A'B'C'$ dari ΔABC dengan isometri yang memetakan $\overline{AB}$pada $\overline{DE}$. Refleksikan $\Delta A'B'C'$ pada $\overleftrightarrow{DE}$. Menggunakan teorema pertukaran sisi pada $\angle C'DF$ maka bayangan dari $\overline{A'C'}$ adalah $\overline{DF}$. Menggunakan teorema pertukaran sisi pada $\angle C'EF$ maka bayangan dari $\overline{B'C'}$ adalah $\overline{EF}$. Sehingga bayangan dari C′ adalah F, dan bayangan $\Delta A'B'C'$ adalah ΔDEF.



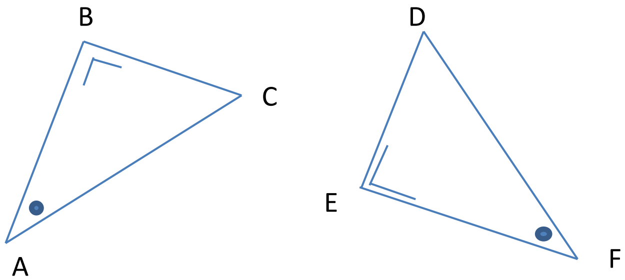
Teorema 4.5 (Kongruensi Sd-Sd-S)

Jika pada dua segitiga, pasangan dua sudut dan satu sisi didepan salah satu sudut yang kongruen, maka kedua segitiga tersebut kongruen.

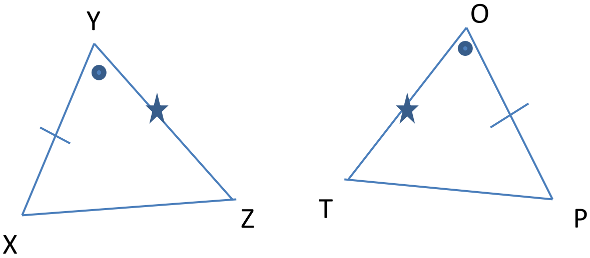
Contoh 4.4

Dengan menggunakan informasi yang ada, apakah pasangan segitiga berikut ini kongruen? Buktikan tiap pasang segitiga kongruen dengan teorema kongruensi segitiga.

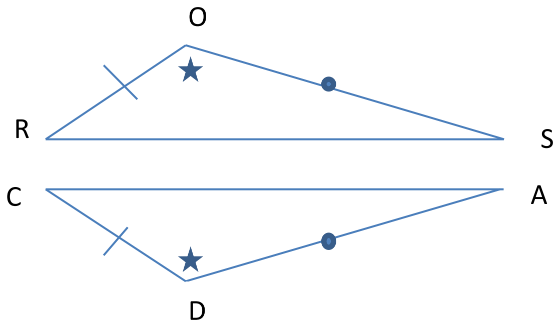
a.



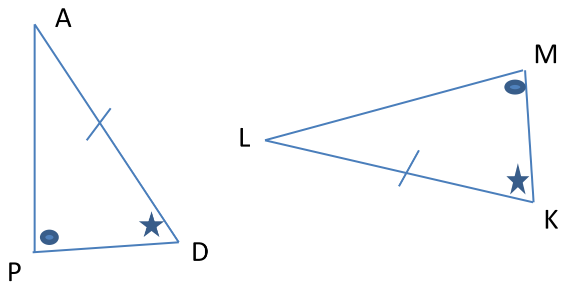
b.



c.



d.

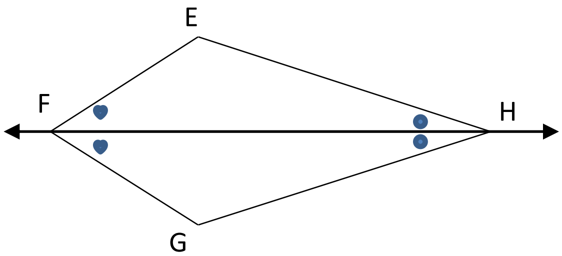


Penyelesaian:

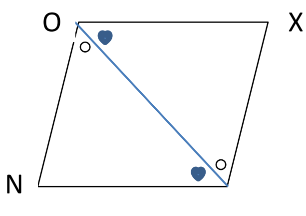
a. $\Delta ABC \cong \Delta FED$ sesuai teorema kongruensi Sd-S-Sd
b. Tidak kongruen.
c. $\Delta CAD \cong \Delta RSO$ sesuai teorema kongruensi S-Sd-S.
d. Tidak kongruen.

LATIHAN 4.2

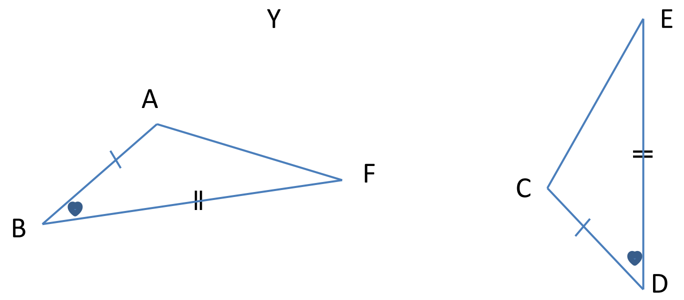
1. Diketahui ΔABC memiliki panjang sisi 2cm, 7cm, dan 8cm; ΔPQR memiliki panjang sisi 7cm, 2cm, dan 8cm. apakah yang dapat disimpulkan dari kedua segitiga tersebut? Jelaskan dengan sifat atau teorema!
2. Berikan alasan dari pembuktian teorema kongruensi Sd-S-Sd pada segiempat $EFGH$ di bawah ini, $\overleftrightarrow{FH}$ merupakan bisector $\angle F$ dan $\angle H$.
   a. Mengapa bayangan dari E pada $\overrightarrow{HG}$?
   b. Mengapa bayangan dari E pada $\overrightarrow{FG}$?
   c. Karena definisi kongruensi, segitiga apakah yang kongruen?



3. Pasangan segitiga berikut ini kongruen, jelaskan alasan kongruen dan titik-titik yang berkorespondensi.
   a.



b.



C. Bukti kongruensi segitiga

Untuk menggunakan sebarang teorema kongruensi segitiga, maka perlu diketahui tiga bagian (S-S-S, S-Sd-S, Sd-S-Sd, atau Sd-Sd-S) dari segitiga yang kongruen dengan tiga bagian yang lain. Jika segitiga kongruen, maka semua bagian yang berkorespondensi juga kongruen berdasarkan teorema bagian yang berkorespondensi pada gambar kongruen. Dengan demikian, teorema S-S-S, S-Sd-S, Sd-S-Sd, dan Sd-Sd-S memungkinkan untuk memperoleh enam bagian yang kongruen jika hanya mempunyai tiga bagian yang kongruen.

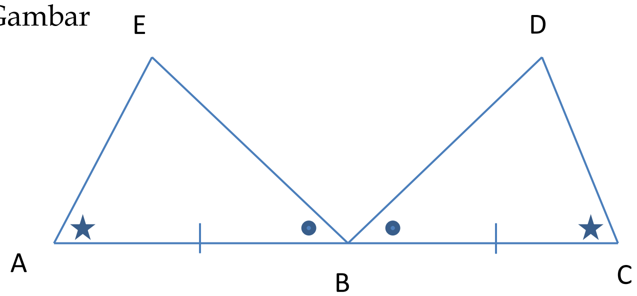
Contoh 4.5

Diketahui $\angle EBA \cong \angle CBD, \overline{AB} \cong \overline{BC}, \angle A \cong \angle C$

Buktikan $\overline{EB} \cong \overline{DB}$

Bukti:

i) Gambar



ii) analisis: dua pasang sudut dan satu sisi apit pada dua segitiga tersebut kongruen, ini sesuai dengan teorema Sd-S-Sd. Untuk mendapat bagian lain yang berkorespondensi, maka urutan titik dari segitiga harus digunakan.

iii) Tulis :

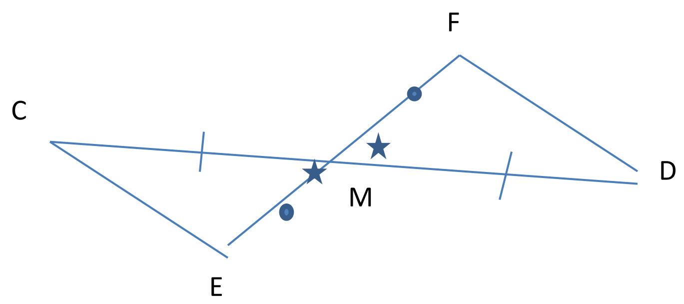
No	Pernyataan	Alasan
1	$\angle EBA \cong \angle CBD$	Teorema kongruensi Sd-S-Sd
2	$\overline{EB} \cong \overline{DB}$	Teorema bagian korespondensi dari gambar kongruen.

Contoh 4.6

Diketahui M titik tengah dari $\overline{CD}$ dan $\overline{EF}$

Buktikan $\Delta CME \cong \Delta DMF$

Bukti:



Analisis: karena M adalah titik tengah dari dua segmen, maka ada dua pasang sisi yang sama. Dua garis yang berpotongan membentuk sudut bertolak belakang yang kongruen.

Tulis:

M titik tengah dari $\overline{CD}$

M titik tengah dari $\overline{EF}$

No	Pernyataan	Alasan
1	$MC = MD, ME = MF$	Definisi titik tengah
2	$\angle CME \cong \angle DMF$	Teorema sudut bertolak belakang
3	$\Delta CME \cong \Delta DMF$	Teorema kongruensi S-Sd-S

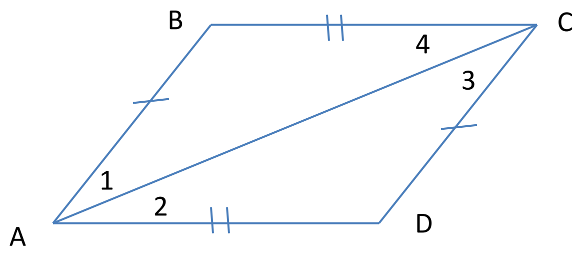
Contoh 4.7

Diketahui $AB = CD$ dan $BC = AD$

Buktikan $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

Bukti:

Gambarkan sesuai informasi yang diketahui



Analisa: kedua segitiga memiliki sisi yang sama yaitu $\overline{AB}$ sehingga terpenuhi segitiga-segitiga yang kongruen menurut Teorema Kongruensi S-S-S.

Tulis:

Diketahui $AB = CD$ dan $BC = AD$

No	Pernyataan	Alasan
1	$AC = AC$	Sifat refleksif kongruensi
2	$\Delta ABC \cong \Delta CDA$	Teorema kongruensi S-S-S
3	$\angle BAC \cong \angle DCA$ atau $\angle 1 \cong \angle 3$	Teorema bagian yang berkorespondensi dari dua segitiga kongruen
4	$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	Teorema garis-garis sejajar

Teorema 4.6

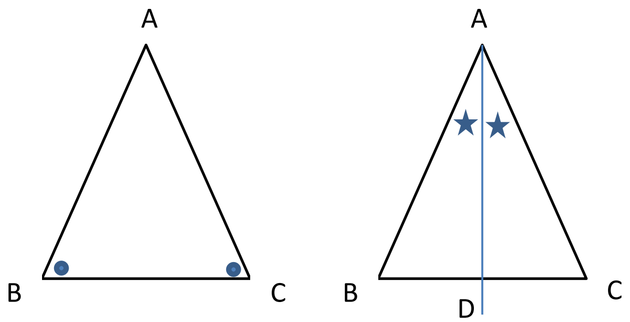
Jika dua sudut dari suatu segitiga kongruen, maka sisi yang berlawanan juga kongruen

Bukti:

Diketahui $\angle B \cong \angle C$

Ditanyakan $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

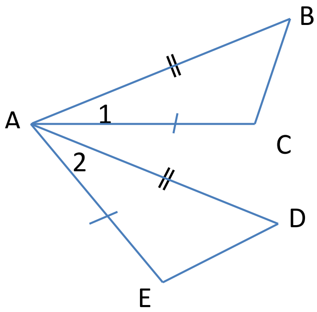
Segitiga ABC digambar, kemudian tentukan bisektor sudut A untuk membuktikan $\Delta ABD \cong \Delta ACD$.



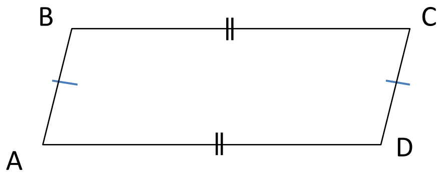
No	Pernyataan	Alasan
1	$\angle BAD \cong \angle CAD$	Definisi bisector sudut
2	$\overline{AD} \cong \overline{AD}$	Sifat refleksif kongruensi
3	$\Delta ABD \cong \Delta ACD$	Teorema kongruensi Sd-Sd-S
4	$\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Teorema bagian yang berkorespondensi dari segitiga yang kongruen

Latihan 4.3.

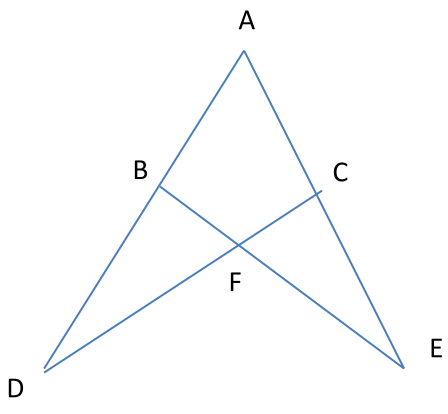
1. Diketahui $\angle 1 \cong \angle 2$, $\overline{AC} \cong \overline{AE}$, $\overline{AB} \cong \overline{AD}$
   a. Teorema apa yang digunakan untuk membuktikan kongruensi segitiga?
   b. Buktikan $\angle B \cong \angle D$!



2. Gunakan Contoh 4.7 untuk membuktikan $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$.
3. Diketahui $AB = CD, BC = AD$. Buktikan $\Delta ABC \cong \Delta CDA$



D. Segitiga *'overlapping'*



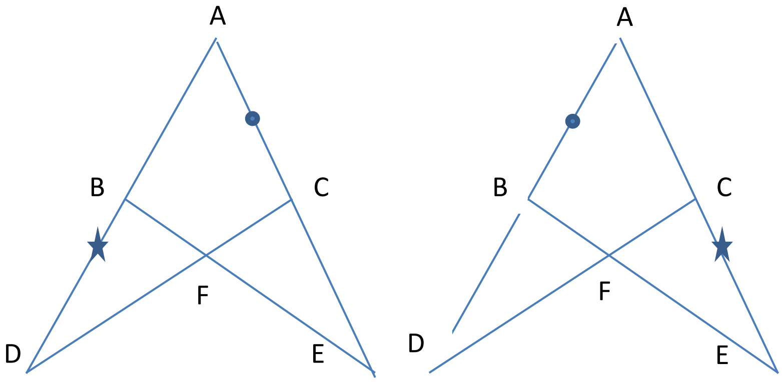
Berapa banyak segitiga dari gambar tersebut? Pada awalnya, beberapa orang hanya melihat dua segitiga yaitu BFD dan CFE, namun terdapat segitiga *'overlapping'* yaitu segitiga ACD dan ABE.

Contoh 4.8.

Jika $AC = AB$ dan $AD = AE$, maka buktikan $\angle D \cong \angle E$!

Bukti:

Mungkin terlihat bahwa segitiga yang digunakan adalah BFD dan CFE, tetapi tidak ada sisi atau sudut dari segitiga-segitiga ini yang kongruen. Sehingga yang digunakan adalah segitiga '*overlapping*' yaitu ACD dan ABE.



Perhatikan bahwa hanya dua sisi yang kongruen, dan terdapat satu sudut yang sama yaitu $\angle A$

No	Pernyataan	Alasan
1	$\angle A \cong \angle A$	Sifat refleksif kongruensi
2	$\Delta ADC \cong \Delta AEB$	Teorema kongruensi S-Sd-S
3	$\angle D \cong \angle E$	Teorema bagian yang berkorespondensi dari segitiga yang kongruen

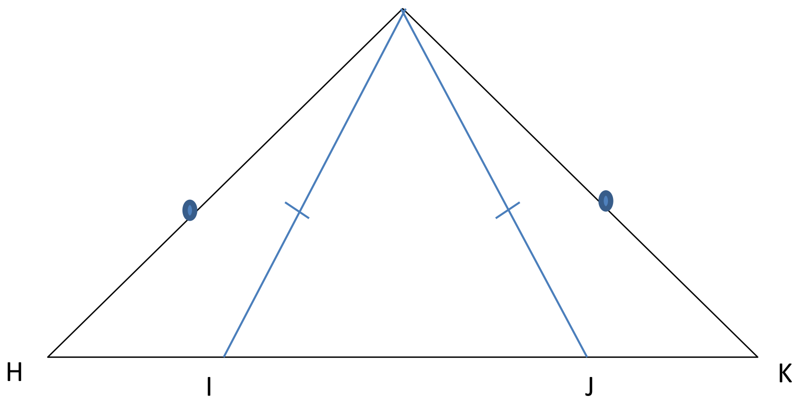
Contoh 4.9.

Diketahui $\overline{GH} \cong \overline{GK}$ dan $\overline{GJ} \cong \overline{GI}$

Buktikan $\overline{HJ} \cong \overline{KI}$

Bukti:

G



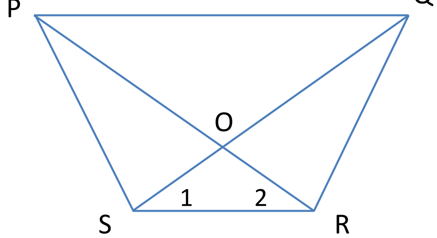
Analisa: $\overline{HJ}$ dan $\overline{KI}$ merupakan sisi dari segitiga yang saling tumpeng tindih GHJ dan GKI. Sisi yang kongruen mengartikan bahwa ΔGIJ dan ΔGHK adalah segitiga samakaki. Sehingga sudut-sudut alas adalah kongruen.

Tulis:

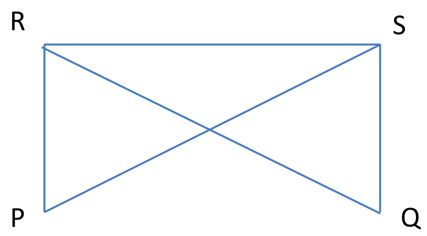
No	Pernyataan	Alasan
1	$\angle H \cong \angle K$	Teorema segitiga samakaki (dengan ΔGHK)
2	$\angle GJI \cong \angle GIJ$	Teorema segitiga samakaki (dengan ΔGIJ)
3	$\Delta GHJ \cong \Delta GKI$	Teorema kongruensi Sd-Sd-S
4	$\overline{HJ} \cong \overline{KI}$	Teorema bagian yang berkorespondensi dari segitiga yang kongruen

LATIHAN 4.4

1. Diketahui segiempat PQRS
   a. Berapa banyak segitiga dalam segiempat tersebut!
   b. Segitiga apa yang kongruen dengan ΔPSR?
   c. Temukan pasangan segitiga *'overlapping'* yang kongruen!



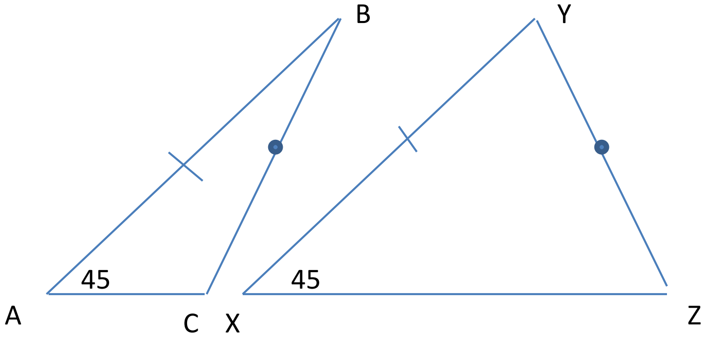
2. Dari Contoh 4.9, buktikan bahwa $\Delta HGJ \cong \Delta KGI$
3. Diketahui $PR = QS, PS = QR$. Buktikan $m\angle P = m\angle Q$

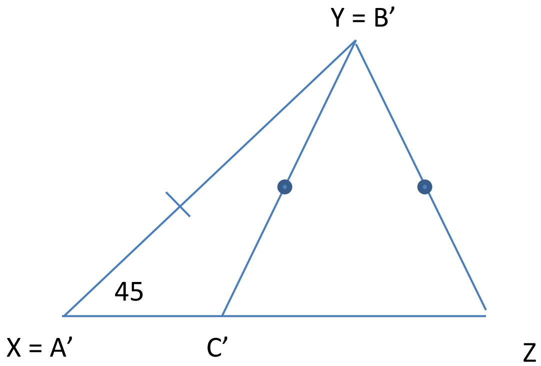


E. Kondisi S-S-Sd dan kongruensi HK

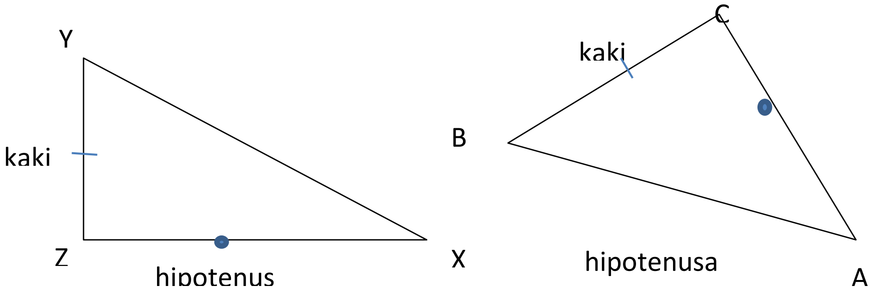
Pada teorema kongruensi Sd-Sd-S, Sd-S-Sd, dan S-Sd-S maka apa yang terjadi jika sudut tidak termasuk kongruen? Inilah yang menjadi kondisi S-S-Sd.

Periksa ΔABC dan ΔXYZ dibawah ini. Ada dua pasang sisi yang kongruen yaitu $\overline{AB} \cong \overline{XY}$ dan $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$. Juga terdapat sepasang sudut yang kongruen yaitu $\angle A \cong \angle X$. Namun ΔABC juga tepat dimasukkan pada ΔXYZ.





Dengan demikian secara umum, kondisi S-S-Sd tidak menjamin kongruensi segitiga. Namun, ketika bagian sudut yang berkorespondensi maka situasinya menjadi berbeda. Perhatikan bahwa pada segitiga siku-siku, kaki segitiga adalah bagian yang memuat sudut siku-siku sementara hipotenusa adalah sisi yang berlawanan dari sudut siku-siku. Misalkan BC = YZ dan AB = XY, dan $\angle C$ dan $\angle Z$ adalah sudut siku-siku dalam segitiga dibawah ini. Maka ini adalah hipotenusa kaki (HK) dan cukup dalam menjamin kongruensi.



Teorema 4.7 (Kongruensi Hipotenusa- Kaki (HK))

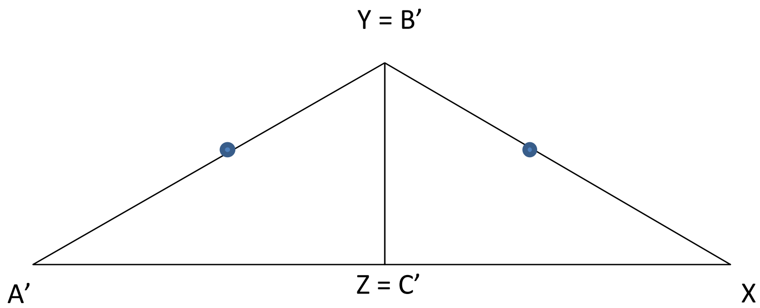
Jika pada dua segitiga siku-siku, hipotenusa dan kaki segitiga yang pertama kongruen dengan hipotenusa dan kaki segitiga yang kedua, maka kedua segitiga siku-siku tersebut kongruen.

Bukti:

Diketahui $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$; $\overline{AB} \cong \overline{XY}$;

$\angle C$ dan $\angle Z$ adalah dua sudut siku-siku.

Apakah $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$?

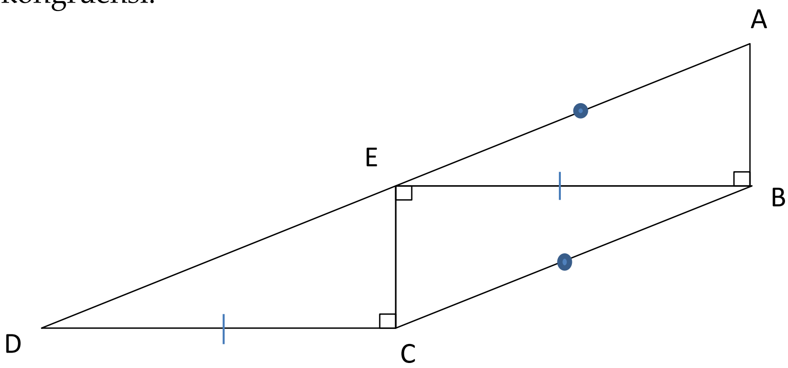


Karena $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$, maka terdapat refleksi komposit dari pemetaan $\overline{BC}$ pada $\overline{YZ}$, dimana bayangan dari A pada sisi lain dari $\overline{YZ}$ dari X ($\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$).

Dengan penjumlahan sudut, $m\angle A'ZX = 180$, dimana A', Z, dan X adalah kolinear. Karena $\overline{AB} \cong \overline{XY}$ dan $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, maka dengan dengan sifat transitif kongruensi $\overline{A'B'} \cong \overline{XY}$. Hal ini mengakibatkan $\Delta A'YX$ segitiga samakaki besar. Menerapkan teorema segitiga samakaki, $\angle A \cong \angle X$. Jadi dengan teorema kongruensi Sd-Sd-S, $\Delta A'B'C' \cong \Delta XYZ$ sehingga $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ (sesuai sifat transitif kongruensi).

Contoh 4.10

Segitiga-segitiga pada gambar di bawah ini adalah kongruen. Untuk setiap pasang segitiga, tentukan titik yang berkorespondensi dan teorema yang membuktikan kongruensi.

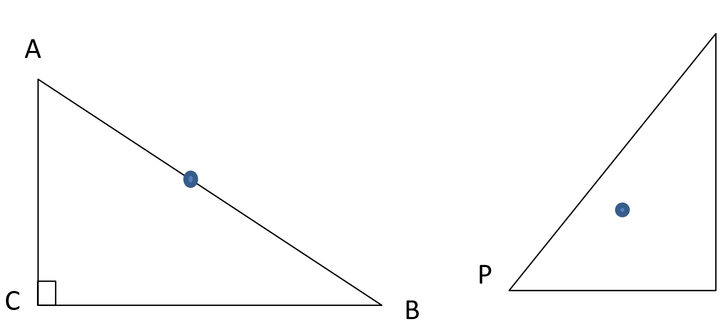


Penyelesaian:

1. $\Delta ABE \cong \Delta CEB$ sesuai teorema kongruensi hipotenusa kaki (HK).
2. $\Delta CEB \cong \Delta ECD$ sesuai teorema kongruensi S-Sd-S.
3. $\Delta ABE \cong \Delta ECD$ sesuai sifat transitif kongruensi.

Contoh 4.11

Diketahui ΔABC dan ΔPOT memiliki bagian yang kongruen seperti gambar berikut. Buktikan tiga kesimpulan dari kedua segitiga tersebut.



Penyelesaian:
Berikut adalah dua kesimpulan yang dapat dibuat sebelum mempelajari bab ini

No	Pernyataan	Alasan
1	ΔGHJ adalah segitiga siku-siku	Definisi segitiga siku-siku
2	$m\angle B + m\angle A = 90$	Teorema jumlah segitiga

Berikut adalah empat kesimpulan karena kongruensi segitiga

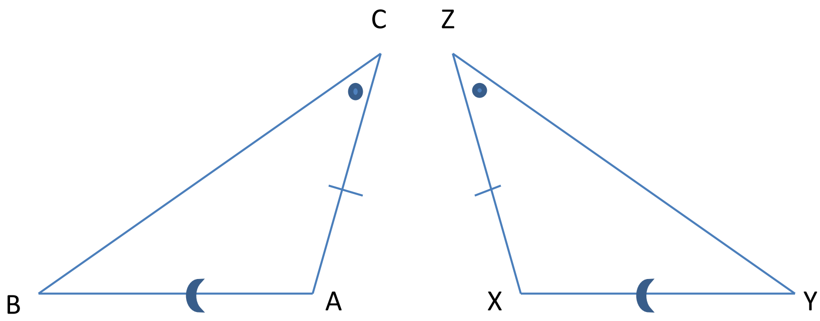
No	Pernyataan	Alasan
1	$\Delta ABC \cong \Delta POT$	Teorema kongruensi hipotenusa-kaki (HK)
2	$\angle A \cong \angle P$	Teorema bagian yang berkorespondensi dari segitiga yang kongruen
3	$\overline{BC} \cong \overline{OT}$	Teorema bagian yang berkorespondensi dari segitiga yang kongruen
4	$\angle O \cong \angle B$	Teorema bagian yang berkorespondensi dari segitiga yang kongruen

Kondisi hipotenusa kaki adalah kasus yang spesial dari S-S-Sd ketika sudut yang kongruen adalah sudut siku-siku. Karena kita dapat menyimpulkan teorema kongruensi hipotenusa-kaki, maka kondisi S-S-Sd kadang-kadang dipakai. Pertanyaan yang sering muncul adalah apakah kondisi S-S-Sd dapat membuktikan segitiga kongruen pada setiap waktu? Dan jawabanya adalah Ya. Hal ini dapat dituliskan pada teorema berikut.

Teorema 4.8 (Kongruensi SsSd)

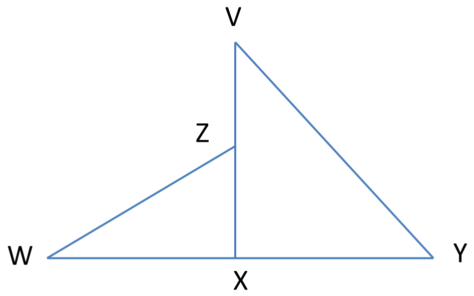
Jika pada dua segitiga, dua sisi dan sudut yang berlawanan dengan sisi yang lebih panjang dari kedua sisi tersebut pada segitiga pertama berturut-turut kongruen dengan dua sisi dan sudut yang berlawanan dengan sisi yang lebih panjang dari kedua sisi tersebut pada segitiga kedua, maka kedua segitiga tersebut kongruen.

Jika $\overline{AB} \cong \overline{XY}$, $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$, $\angle C \cong \angle Z$, dan $AB > AC$ (begitu juga $XY > XZ$) maka $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$.



LATIHAN 4.5

1. Gambarlah dua segitiga non-kongruen yang memenuhi kondisi S-S-Sd.
2. Ikuti langkah berikut untuk menggambarkan suatu segitiga dengan kondisi S-S-Sd.
   a. Gambarkan $\overrightarrow{XY}$
   b. Gambarkan $\angle ZXY$ dengan ukuran 50 dan XZ = 11cm
   c. Gambar lingkaran Z dengan jari-jari 9cm. missal W adalah titik potong dari $\odot Z$ dan $\overrightarrow{XY}$
3. Diketahui $\overline{VX} \perp \overline{WY}$, $WZ = VY, XZ = XY$. Buktikan $\angle W \cong \angle V$.



F. Sifat gambar khusus

Penggunaan teorema kongruensi segitiga sangat penting dalam menyimpulkan sifat dari gambar-gambar yang khusus. $PARL$ di bawah ini adalah jajar genjang yang memiliki diagonal $\overline{PR}$ dan $\overline{AL}$, membentuk 4 segitiga tumpang tindih dan 4 segitiga yang tidak tumpang tindih.

Pasangan dari segitiga-segitiga ini dapat dibuktikan kongruen dan dari kongruensi, banyak sifat dari jajar genjang yang dapat disimpulkan. Karena $PARL$ sebenarnya bukan gambar yang khusus, maka sifat-sifat berikut pasti benar pada sebarang jajar genjang.

Contoh 4.12

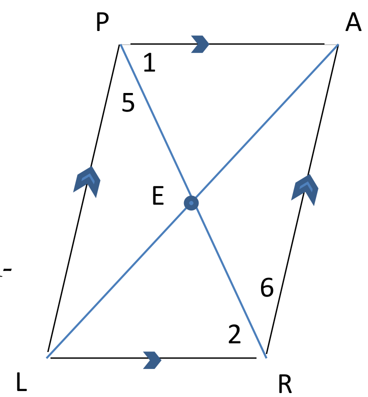
Diketahui jajargenjang $PARL$

Buktikan:

1. $\Delta RPL \cong \Delta PRA$
2. $\overline{PA} \cong \overline{RL}, \overline{PL} \cong \overline{RA}$
3. $EP = ER$

Gambar:

Pada jajar genjang tersebut digambarkan sesuai dengan sifatnya



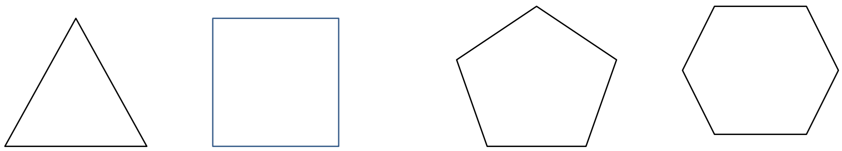
Analisis:

1. Ada sisi yang sama pada ΔRPL dan ΔPRA. Setiap pasang dari sisi yang sejajar mengakibatkan sepasang sudut dalam yang kongruen. Ini adalah syarat cukup dari kongruensi segitiga.
2. Ada bagian-bagian yang berkorespondensi pada ΔRPL dan ΔPRA.
3. Akan ditunjukkan $\Delta ERL \cong \Delta EPA$ untuk mendapatkan $EP = ER$ menggunakan bagian-bagian yang berkorespondensi.

Tulis:

No	Pernyataan	Alasan
1	$\overline{PA} \parallel \overline{LR}$	Definisi jajar genjang
2	$\angle 1 \cong \angle 2$	Teorema sudut dalam berseberangan
3	$\overline{PL} \parallel \overline{AR}$	Definisi jajar genjang
4	$\angle 5 \cong \angle 6$	Teorema sudut dalam berseberangan
5	$\overline{PR} \cong \overline{RP}$	Sifat refleksif kongruensi
6	$\Delta RPL \cong \Delta PRA$	Teorema kongruensi Sd-S-Sd
7	$\overline{PA} \cong \overline{RL}, \overline{PL} \cong \overline{RA}$	Teorema bagian yang berkorespondensi dari segitiga yang kongruen
8	$\angle 3 \cong \angle 4$	Teorema sudut bertolak belakang
9	$\Delta ERL \cong \Delta EPA$	Teorema kongruensi Sd-Sd-S
10	EP = ER	Teorema bagian yang berkorespondensi dari segitiga yang kongruen

Tipe gambar yang lain yang mengarah pada kekongruenan segitiga adalah poligon beraturan.



Segitiga samasisi $n = 3$

persegi $n = 4$

Pentagon berraturan $n = 5$

hexagon berraturan $n = 6$

Gambar 4. 1 poligon beraturan

Definisi 4.1 Poligon beraturan

Suatu poligon beraturan adalah poligon konvex yang sudut-sudutnya kongruen dan sisi-sisinya juga kongruen.

Poligon regular dengan 3 sisi adalah segitiga sama sisi. Poligon regular dengan 4 sisi adalah segiempat. Selain itu mereka disebut pentagon beraturan, hexagon beraturan, dan seterusnya.

Pada contoh, diberikan jajar genjang dengan sifat-sifatnya. Kesimpulan akhir dimana $EP = ER$ mengakibatkan E menjadi titik tengah $\overline{PR}$. Karena kita dapat mensubstitusi $\overline{LA}$ sebagai $\overline{PR}$, E juga menjadi titik tengah $\overline{LA}$.

Teorema 4.9 (Sifat-sifat jajargenjang)

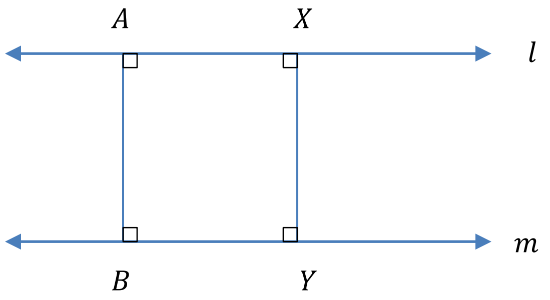
Pada sebarang jajar genjang, berlaku:

1. Tiap diagonalnya membentuk dua segitiga kongruen;
2. Sisi-sisi yang berlawanan adalah kongruen;
3. Diagonal-diagonalnya saling membagi pada titik tengah.

Karena teorema hirarki segiempat, maka juga dapat disimpulkan bahwa sifat jajar genajng dapat diaplikasikan pada seluruh belah ketupat, persegi panjang, dan persegi.
Akibat dari teorema sifat jajar genjang merupakan jarak diantara garis-garis sejajar.

Teorema 4.10
Jarak diantara garis-garis sejajar adalah konstan.

Bukti:
Diketahui $l \parallel m$, $\overline{AB} \perp l$, $\overline{XY} \perp l$
Akan dibuktikan $\overline{AB} \cong \overline{XY}$



Menurut teorema ketagaklurusan pada garis-garis sejajar, maka , $\overline{AB} \perp l$, $\overline{XY} \perp m$. Hal ini berakibat AB dan XY adalah jarak diantara garis l dan m. Selain itu, $ABXY$ memenuhi syarat cukup untuk persegi panjang. Karena sisi-sisi yang berlawanan dari sebarang jajar genjang adalah kongruen, maka sisi-sisi yang berlawanan dari persegi panjang ini juga kongruen. Jadi terbukti bahwa $\overline{AB} \cong \overline{XY}$.

Pada bab sebelumnya, telah dipelajari bagaimana mengkonstruksi lingkaran melalui tiga titik non-kolinear. Jadi ada lingkaran yang memuat seluruh titik pada suatu segitiga samasisi. Sekarang bagaimana dengan persegi?

Karena diagonal-diagonal persegi saling membagi satu sama lain (teorema sifat jajar genjang) dan karena diagonalnya memiliki panjang yang sama (persegi adalah persegi panjang) maka perpotongan diagonal-diagonal persegi adalah titik pusat lingkaran yang memuat seluruh titik pada persegi.

Teorema 4.11 (Pusat dari Poligon beraturan)

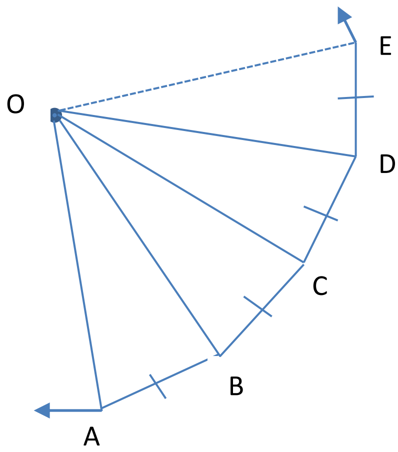
Pada sebarang poligon beraturan ada suatu titik (yang merupakan pusat) yang berjarak sama terhadap seluruh titik sudutnya.

Bukti:

Diketahui poligon beraturan ABCD

Akan dibutunjukkan ada titik O yang berjarak sama dari A, B, C, dan D.

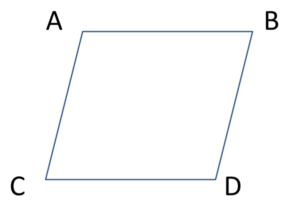
Gambarkan ABCD…



Misal O adalah pusat lingkaran yang memuat A, B, dan C. maka $OA = OB = OC$. Karena $AB = BC$ sesuai definisi poligon beraturan, maka $OABC$ adalah suatu layang-layang dengan diagonal simetri $\overline{OB}$. Dengan demikian $\overline{BO}$ membagi $\angle ABC$. Misal x = m$\angle ABO$ = m$\angle OBC$. Karena ΔOBC adalah segitiga samakaki, m$\angle OBC$ = m$\angle OCB$= x. ukur sudut dari poligon beraturan sama dengan $2x$ maka m$\angle OCD = x$ juga. Jadi $\Delta OCB \cong \Delta OCD$ sesuai teorema kongruensi S-Sd-S, dan karena teorema bagian yang berkorespondesi untuk segitiga yang kongruen maka $OC = OD$.

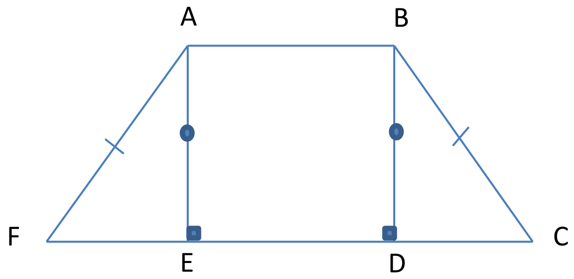
LATIHAN 4.6

1. Berikut adalah jajar genjang $ABCD$
   a. Sisi-sisi manakah yang kongruen?
   b. Sudut-sudut manakah yang kongruen?
   c. Manakah titik tengah – titik tengah yang sama?



2. Ulangi pertanyaan No 1 namun gambarnya adalah belah ketupat $ABCD$.

   Gambar jajargenjang $OPQR$ untuk No 3 dan 4.
3. Jika $= PR = x$, maka tentukan panjang x.
4. Jika $m\angle POR = 102$, maka tentukan besar sudut yang lain.
5. Pada segiempat $ABCF$ di bawah ini, $\overline{AE} \perp \overline{CF}$ dan $\overline{BD} \perp \overline{CF}$. Jika $AE = BD$ dan $AF = BC$, maka buktikan $\angle F \cong \angle C$.



G. Syarat cukup jajargenjang

Jika kedua pasang sisi yang berlawanan dari segiempat kongruen, maka segiempat itu adalah jajargenjang

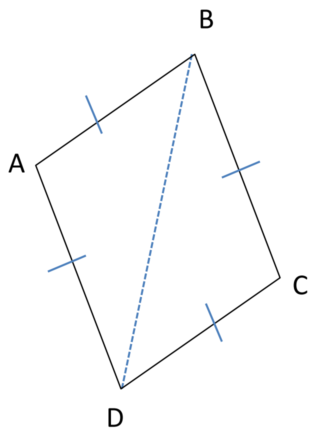
Contoh 4. 13.

Diketahui segiempat $ABCD$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

Akan dibuktikan $ABCD$ adalah jajar genjang

Bukti:

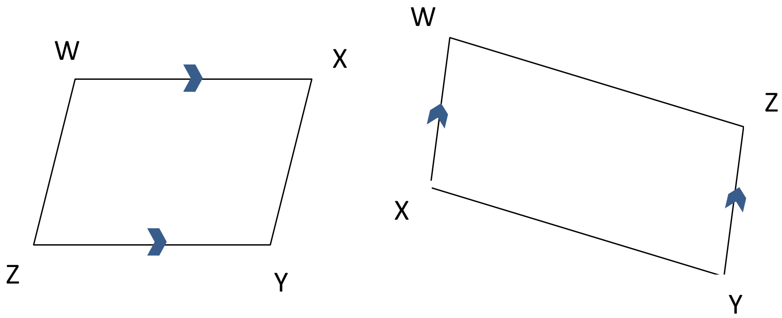
Jika satu diagonal digambarkan dalam segiempat tersebut maka akan terbentuk segitiga yang kongruen. Hal ini cukup untuk menyimpulkan sisi-sisi yang berlawanan juga sejajar.



Tulis:

No	Pernyataan	Alasan
1	Gambarkan $\overline{BD}$	Postulat titik-garis
2	$\overline{BD} \cong \overline{DB}$	Sifat refleksif kongruensi
3	$\Delta ABD \cong \Delta CDB$	Teorema kongruensi S-S-S
4	$\angle ABD \cong \angle CDB$	Teorema bagian yang berkorespondensi dari segitiga yang kongruen
5	$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	Teorema kesejajaran
6	$\angle ADB \cong \angle CDB$	Teorema sudut dalam berseberangan
7	$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Teorema kesejajaran
8	$ABCD$ adalah jajar genjang	Definisi jajar genjang

Contoh tersebut menunjukkan bahwa kedua pasang sisi yang berlawanan adalah kongruen adalah syarat cukup bagi segiempat untuk menjadi jajargenjang. Secara umum, p adalah syarat cukup untuk q.



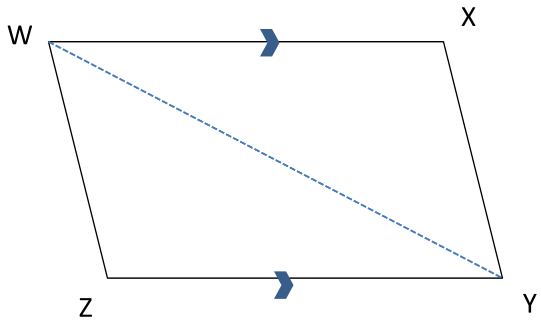
Gambar 4.3.

Contoh 4.13

Jika segiempat memiliki sepasang sisi sejajar dan kongruen maka segiempat itu adalah jajar genjang.

Diketahui $WXYZ$ adalah segiempat dengan $\overline{WX} \parallel \overline{YZ}$ dan $WX = YZ$

Buktikan $WXYZ$ adalah jajar genjang.
Bukti:



No	Pernyataan	Alasan
1	Gambarkan $\overline{WY}$	Postulat titik-garis
2	$\overline{WY} = \overline{WY}$	Sifat refleksif kongruensi
3	$m\angle XWY = m\angle ZYW$	Teorema kongruensi S-S-S
4	$\Delta WZY \cong \Delta YXW$	Teorema bagian yang berkorespondensi dari segitiga yang kongruen
5	$m\angle ZWY = m\angle XYW$	Teorema kesejajaran
6	$\overline{WZ} \parallel \overline{XY}$	Teorema sudut dalam berseberangan
7	$WXYZ$ adalah jajar genjang	Definisi jajar genjang

Teorema 4.12. Syarat cukup untuk jajargenjang

Jika pada suatu jajar genjang berlaku

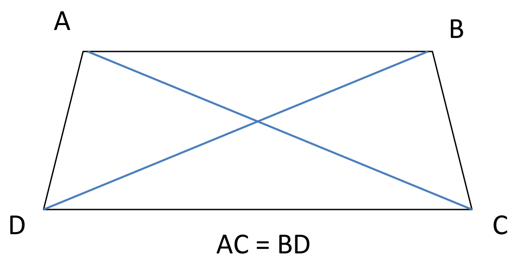
a. Pasangan sisi yang berlawanan kongruen
b. Pasangan sudut yang berlawanan kongruen
c. Diagonal-diagonalnya saling membagi satu sama lain
d. Sepasang sisinya sejajar dan kongruen.

Perhatikan bahwa seluruh bagian dari teorema tersebut adalah konvers dari sifat jajar genjang, tapi tetap harus diperhatikan bahwa tidak semua konvers sifat ini benar. Perhatikan sifat persegi panjang berikut.

Jika suatu segiempat adalah persegi panjang, maka diagonal-diagonalnya kongruen.

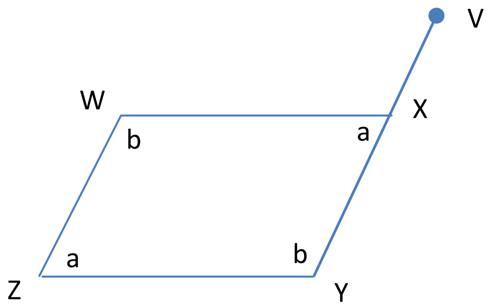
Konvers dari teorema ini adalah

Jika diagonal-diagonal suatu segiempat adalah kongruen, maka segiempat tersebut adalah persegi panjang.



LATIHAN 4.7

1. Sebutkan sifat persegi panjang yang konversnya bukan syarat cukup bagi persegi panjang.
2. Jika segiempat $ABCD$ memiliki $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ dan $\angle A \cong \angle C$, maka segiempat tersebut adalah jajar genajng. Buktikan!
3. Buktikan dengan dua langkah tanpa menggambar: jika dua pasang sisi berlawanan dari segiempat kongruen maka dua pasang sudut yang berlawanan juga kongruen.
4. Diketahui segiempat $WXYZ, m\angle W = m\angle Y, m\angle WXY = m\angle Z$. Buktikan $WXYZ$ adalah jajar genjang.



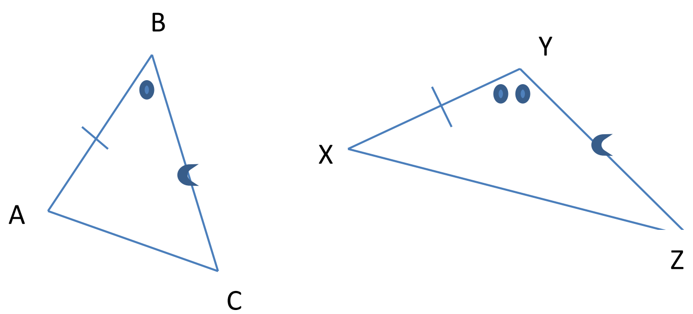
H. Ketaksamaan SAS

Teorema ketaksamaan S-Sd-S

Jika pada dua sisi segitiga pertama kongruen dengan dua sisi pada segitiga kedua, dan ukuran sudut interior segitiga pertama kurang dari ukuran sudut interior segitiga kedua, maka sisi ketiga dari segitiga pertama lebih pendek daripada sisi ketiga dari segitiga kedua.

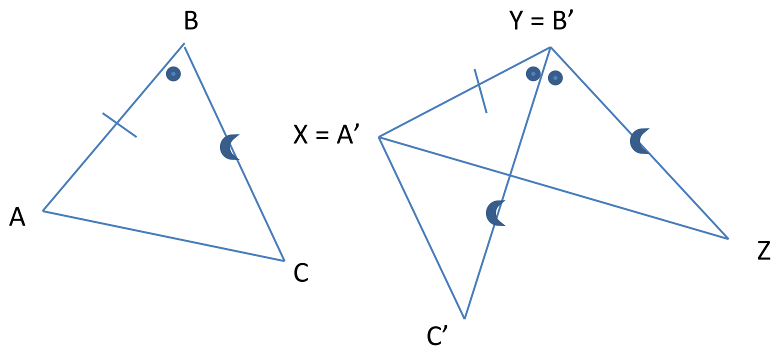
Diketahui $AB = XY, BC = YZ$ dan $m\angle B < m\angle Y$

Buktikan $AC < XZ$

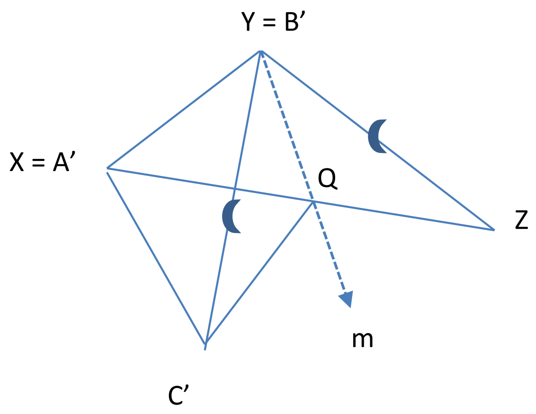


Kaarena $= XY$, maka ada isometri T dengan $T(\overline{AB}) = \overline{XY}$. $\Delta A'B'C'$ adalah $T(\Delta ABC).T$ dipilih sehingga C' sebagai bayangan C terletak pada sisi yang sama dari $\overline{XY}$ sebagai Z.

hasilnya ditunjukkan sebagai berikut. Perhatikan bahwa $\Delta C'YZ$ adalah sama kaki karena $C'Y = ZY$.



Karena $m\angle A'B'C' < m\angle XYZ$, $\overrightarrow{YC}$ terletak dalam interior $\angle XYZ$. Di bawah ini garis simetri m dari segitiga samakaki $\Delta C'YZ$, membagi $\overline{XZ}$ di Q. garis m merupakan bisektor $\perp$ $\overline{C'Z}$, maka Q berjarak sama dari C′ dan Z, dan berakibat QC′ = QZ.

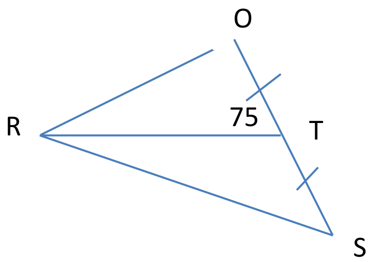


Dari ketaksamaan segitiga, $A'C < A'Q + QC'$ tetapi $A'C' = AC, A'Q$ adalah XQ dan $QC' = QZ$. Dengan mensubstitusikan $AC < XQ + QZ, XQ + QZ = XZ$ maka dengan teorema keantraaan $AC < XZ$.

Banyak sekali yangdapat diketahui tentang segitiga-segitiga dan S-Sd-S. dari panjang AB dan AC pada dua sisi segitiga, maka dapat dihitung range kemungkinan panajng dari sisi ketiga BC menggunakan ketaksamaan segitiga. Semakin besar sudut A maka semakin panjang sisi BC. Jika diketahui besar sudut A maka panjang sisi ketiga dapat ditentukan. Caranya dengan menggunakan trigonometri.

LATIHAN 4.8

1. Manakah dari teorema berikut yang tidak digunakan dalam pembuktian ketidaksamaan segitiga:
   a. Teorema antara
   b. Teorema simetri Segitiga samakaki
   c. Teorema segitiga samakaki
2. Misalkan dalam ΔABC dimana $AB = 6, BC = 3, m\angle B = 62°$.
   a. Apakah AC tunggal?
   b. Cabang matematika apa yang mempelajari perhitungan AC dari informasi yang diketahui?
3. Jelaskan mengapa $RS > QR$ dari gambar di bawah ini.

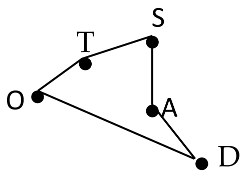


BAB V
PENGUKURAN

A. Rumus Keliling

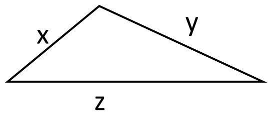
Definisi 5.1
Keliling poligon adalah jumlah dari panjang sisinya.

Tour melalui 5 kota (simpul), berakhir di tempat anda memulai. Menurut peta di bawah ini, anda akan menempuh perjalanan sekitar 921 mil dan akan membawa anda menempuhnya 16 jam lebih sedikit. Dalam menghitung total ini anda telah menghitung keliling STODA.



Situasi di atas menggambarkan bahwa panjang sisi segibanyak dapat diukur diberbagai satuan. Biasanya satuan tersebut adalah satuan panjang dalam sistem metrik (meter, centimeter, dll) atau sistem umumnya (inci, mil, dll). Saat menghitung keliling, satuan untuk semua sisi harus sama.

Jika semua sisi segibanyak memiliki panjang yang berbeda, tidak ada rumus khusus untuk mengukurnya. Sebuah rumus untuk keliling p dari sebuah segitiga dengan variabel x, y, dan z hanya $p = x + y + z$.



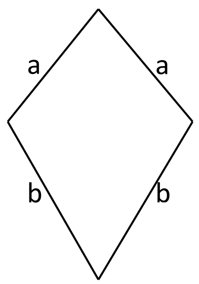
$$p = x + y + z$$

Tapi jika segibanyak memiliki beberapa sisi yang sama, maka untuk menghitung pengukuran bisa dipersingkat. Seperti yang kita ketahui layang-layang memiliki dua pasang sisi yang sama panjang. Jika panjang sisinya adalah a dan b, maka keliling p nya dapat diperoleh dengan rumus

$$p = a + a + b + b$$

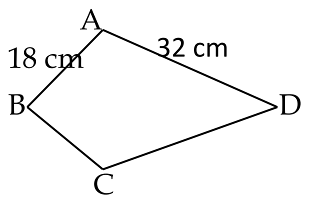
Atau, menggunakan aljabar sederhana, $p = 2a + 2b$

Atau, difaktorkan $p = 2(a + b)$.



Contoh 5.1

Layang-layang $ABCD$ dengan ujung B dan D memiliki panjang sisi seperti yang ditunjukkan. Hitunglah kelilingnya!



Penyelesaian:

Gunakan definisi kelilingKeliling dari $ABCD = AB + BC + CD + AD$

Sejak B dan D adalah ujung-ujung dari layang-layang,
$AB = BC \; dan \; CD = AD$.
Substitusi,
Keliling dari $ABCD = 18 + 18 + 32 + 32 = 100$ cm.

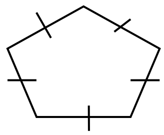
Contoh 5.2

Sebuah bendera berbentuk segi empat dengan lebar sama dengan 1,6 dari panjangnya.Jika anda memiliki 10 meter bahan untuk tepi, berapa bendera yang dapat dibuat?

Penyelesaian:

Pertama gambarlah. Ujungnya adalah panjang ℓ dan lebar w persegi panjang. Keliling p = 2(ℓ + w)
Di sini, ℓ = 1,6 w dan p = 10
Substitusi untuk p dan ℓ
$10 = 2(1{,}6w + w)$
$10 = 2(2{,}6w)$
$10 = 5{,}2w$
Memecahkan persamaan, $w = (10/52) \approx 1{,}923$. Sejak $\ell \approx 1{,}6w$, $\ell \approx 3{,}077$. Diketahui bahwa 1 meter = 100 centimeter, kamu dapat membuat bendera sekitar 192 cm dan panjang 308 cm.

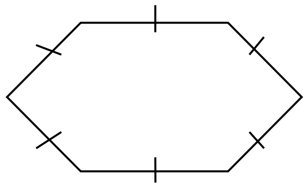
Jika semua sisi segibanyak memiliki panjang yang sama, segibanyak disebut sama sisi. Belah ketupat dan persegi adalah segi empat- segi empat. Ada segibanyak sama sisi dengan sejumlah sisi. Rumus untuk keliling segibanyak sama sisi mengikuti langsung dari definisi keliling.



Segilima sama sisi

Rumus keliling segibanyak sama sisi

Dalam segibanyak sama sisi dengan n sisi panjang s, keliling $p = ns$.



Segienam sama sisi

Sejak semua suku banyak biasa sama, rumus ini berlaku untuk segibanyak biasa. Misalnya, dalam segitiga sama sisi, p = 3s. Dalam persegi, p =4s. Dalam oktagon biasa, p = 8s.

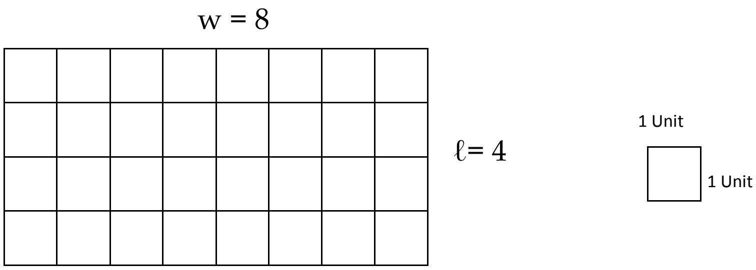
LATIHAN 5.1

1. Keliling persegi panjang adalah 70. Panjang satu sisi persegi panjang adalah 3 kali panjang sisi yang lain. Berapa panjang sisi persegipanjang tersebut!
2. Keliling dari belah ketupat adalah 12 cm.
   a. Apakah informasi ini cukup untuk menemukan panjang sisi belah ketupat?
   b. Jika demikian temukan panjang itu?
3. Rambu lalu lintas berhenti berbentuk segi- 8 biasa. Jika kelilingnya 3 m. Berapakah panjang masing-masing sisinya?
4. Keliling segitiga sama sisi adalah p. Berapa panjang masing-masing sisi?
5. Jika semua sudut segibanyak memiliki ukuran yang sama, segibanyak adalah bentuk yang sudutnya sama.
   a. Berapakah jumlah ukuran sudut dalam segi-10 dengan bentuk sudutnya sama?
   b. Berapa ukuran masing-masing sudut dalam sebuah segi-10 sama sudut?

c. Berapakah ukuran masing-masing sudut dalam sebuah segi-10 sama sisi?

B. Sifat Luas Bentuk

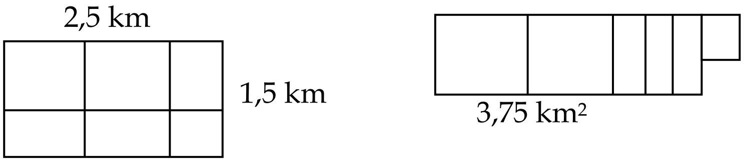
Untuk menemukan luas suatu wilayah, tutupi dengan salinan kongruen wilayah yang diperlukan. Luas adalah jumlah salinan yang diperlukan. Misalnya persegi panjang dengan panjang $\ell = 4$ dan lebar $w = 8$ dapat ditutup dengan 32 satuan kuadrat. Jadi kita katakan bahwa luasnya 32 unit satuan persegi atau 32 unit^2. Ada 4 baris dan 8 kolom. Bilangan-bilangan tersebut adalah dimensi dari segi empat. Jumlah persegi di persegi panjang adalah ukuran dari dimensinya.



Setiap kali dimensi persegi panjang adalah bilangan bulat, satuan kuadrat akan sesuai. Tetapi anggaplah sebuah peternakan berbentuk seperti persegi panjang, 1,5 km dan 2,5 km seperti yang ditunjukkan di bawah ini:

Salah satu cara untuk menemukan lahan pertanian ditunjukkan oleh angka pada halaman berikutnya. Di sini satuan yang digunakan adalah 1 kilometer persegi. Maka wilayah pertanian dibagi menjadi kilometer persegi.

Ada dua kilometer persegi, tiga kilometer persegi dan seperempat kilometer persegi. Pikirkan untuk menempatkannya dari ujung ke ujung. Hasilnya adalah 3,75 kilometer persegi. Inilah yang bisa anda dapatkan dengan mengalikan 1,5 km

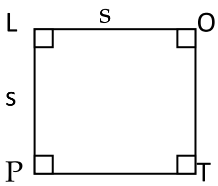


Situasi yang satu ini menggambarkan empat sifat mendua sisi yang sejajar dari luas yang kita asumsikan.

Postulat Luas:

a. **Sifat khusus.** Diberikan satuan wilayah, setiap wilayah segibanyak memiliki luas yang khusus.
b. **Rumus persegi panjang.** Luas persegi panjang dengan sisi ℓ dan w adalah ℓw.
c. **Sifat Kongruen.** Bentuk yang kongruen mempunyai luas yang sama.
d. **Sifat tambahan.** Luas dari gabungan dari dua wilayah yang tidak tumpang tindih adalah jumlah dari wilayah.

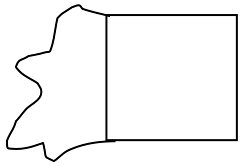
Kasus khusus dari rumus persegi adalah jika luas persegi dengan sisi s adalah s^2. Ini digambarkan di bawah ini



Luas $PLOT = s^2$

Terkadang kita menulis luas (F) untuk luas gambar F. Dengan catatan ini, sifat kongruen dari luas menjadi: Jika F = G, maka G luas (F) = luas (G). Wilayah yang tidak tumpang tindih berarti wilayah yang tidak memiliki titik interior. Mereka dapat berbagi batasan seperti gambar di bawah ini. Bentuk Luas total menjadi : jika F dan G tidak tumpang tindih, luas (F ∪ G) = luas (F) + luas (G).

Luas (F ∪ G) = Luas (F) + Luas (G)



Perhatikan bahwa keliling F ∪ G tidak sama dengan jumlah keliling dari F dan G. (batas umum dihitung 2 kali).

Semua sifat dua sisi yang sejajar luas digunakan dalam contoh 1.

Contoh 5.3

Rencana lantai sebuah rumah peternakan di gambar pada sistem koordinat dengan koordinat O(0, 0), I(30, 0), H(30, 10), G(45, 10), F(45,28), E(22, 28), D(22, 43), C(8, 43), B(8, 28), A(0, 28), J(0, 10).

a. Temukan luas kamar I (L. BCDE), II(L. JGFA), dan III (L. OIHJ).

b. Temukan luas lantai tanah!

Penyelesaian:

a. I, II, dan III adalah persegi. Luas horisontal ditemukan dengan mengurangkan sepasang koordinat x yang sesuai dari titik pusat koordinat. Misalkan CD = |22 - 8| = 14. Demikian pula, luas vertikal ditemukan dengan mengurangkan koordinat y dari titik pusat koordinat . sebagai contoh, BC = |28 - 43| = 15.

Luas bagian I : CD = 14 dan BC = 15

Luas bagian II : AF = 45 dan FG = 18

Luas bagian III : IO = 30 dan HI = 10

b. Jumlah luas, luas dari rumah dijumlahkan dari luas I, II dan III. Rumus luas persegi:

Luas (I) = 15 x 14 = 210 satuan^2

Luas (II) = 18 x 45 = 810 satuan^2

Luas (III) = 10 x 30 = 300 satuan^2

Sekarang terapkan sifat penjumlahan luas.

Luas(rencana denah) = 210 + 810 + 300

= 1320 satuan^2

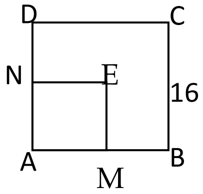
LATIHAN 5.2

1. Persegi panjang ABCD dengan ukuran 8,3 cm dan 11,4 cm.
   a. Apakah satuan yang tepat dari luas dalam situasi ini? cm^2.
   b. Tentukan luas ABCD.
2. Misalkan negara kesatuan berbentuk persegi panjang dengan panjang dari timur ke barat panjangnya 3.000 km dan dari utara ke selatan 1.600 km.
   a. Berapakah keliling dari negara tersebut?
   b. Berapa luas dari negara tersebut?
3. Hitung luas segibanyak yang titik-titik koordinatnya seperti di bawah ini!

a. (0, 0), (0, 10), (10, 10), (10, 0).

b. (0, 0), (0, k), (k, k), (k, 0).

4. Gambar di samping, ABCD dan AMEN adalah persegi. M adalah titik tengah AB, BC = 16. Tentukan luas BCDNEM!



5. Panjang dari persegi panjang adalah 3 kali lebarnya w. Tentukan luas persegi panjang tersebut dalam w!

6. Carilah bangun persegi panjang di sekelilingmu, hitunglah luasnya!

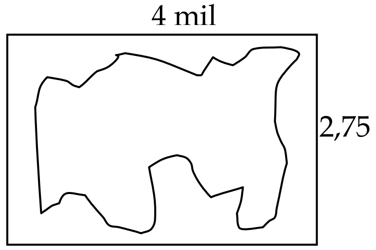
   a. dalam satuan ft^2

   b. dalam cm^2

C. Luas Bentuk tak Beraturan

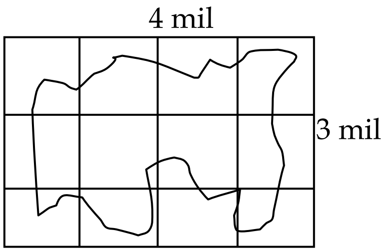
Kebanyakan bentuk merupakan batas bukan kesatuan busur melingkar atau segmen. Bentuknya tidak beraturan. Masih memiliki luas; dibutuhkan ruang. Untuk segala macam alasan, zona semacam itu atau untuk merencanakan untuk menimbun danau dengan ikan, orang mungkin ingin mengetahui luasnya.

Untuk mendapat penaksiran pertama, anda bisa menggambar kerutan di sekitar danau.



Luas danau kurang dari luas persegi panjang, yaitu 4 mil x 2,75 mil. Artinya luas danau kurang dari 11 mil^2.

Untuk mendapatkan perkiraan yang lebih baik, Anda bisa menutupi danau dengan pengubinan persegi. Di sini persegi yang digunakan memiliki sisi 1 mil.



Persegi-persegi di atas terlalu besar untuk memperkirakan secara akurat luas danau. Dalam setiap persegi anda harus memperkirakan berapa banyak persegi-persegi yang ditutupi oleh danau. Persegi yang lebih kecil diperlukan di bawah adalah persegi yang kurang dari 1 mil.

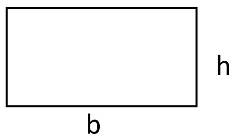
Prosedur di atas dapat dilanjutkan dengan menggunakan grid yang lebih halus. Perkiraan dapat dibuat untuk berbeda dari luas sebenarnya tidak lebih dari 1 mil^2 atau 0,01 mil^2, atau bahkan lebih dekat. Ketika persegi yang lebih kecil dan lebih kecil digunakan, kita katakan bahwa perkiraan mendekati luas yang sesungguhnya.

LATIHAN 5.3

1. Faktorkan $x^2 - y^2$.
2. Persegipanjang memiliki luas 96 satuan persegi. Jika lebarnya adalah 4 satuan, berapakah panjangnya?
3. Seorang ingin membuat ubin lantai dapur dengan ubin persegi yang mempunyai sisi 8 inci. Jika dapur berukuran 10 kaki x 12 kaki, berapa banyak ubin yang dibutuhkan?

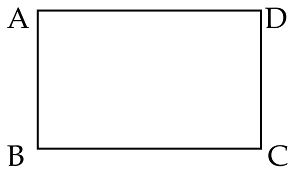
D. Luas Segitiga

Sebagian besar bentuk yang telah anda pelajari sejauh ini merupakan jenis segibanyak khusus. Bentuk-bentuk ini begitu umum sehingga rumus yang telah dikembangkan untuk memberi wilayahnya dalam hal panjang segmen. Salah satu rumus tersebut diasumsikan dalam dalil luas yaitu luas persegi panjang sama dengan hasil kali sisi-sisinya.



$$L = hb$$

Semua rumus luas lainnya untuk segibanyak dapat diturunkan dari postulat tersebut. Untuk memulai, mudah untuk menemukan luas segitiga ΔABC siku-siku dengan benar. Putar saja ΔABC 180^0 sekitar M, titik tengah $\overline{AC}$, seperti yang anda lakukan dalam membuat pengubinan. Bayangannya $\Delta CDA. ABCD$ segiempat adalah jajargenjang dengan sudut siku-siku, jadi $ABCD$ adalah persegipanjang denga sifat konruen dan aditif dari luas postulat, luas segitiga masing-masing adalah setengah persegi panjang.



Luas $ABCD = AB.BC$
Jadi Luas $\Delta ABC = ½\ (AB.BC)$

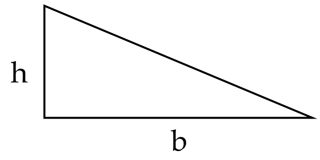
Argumen ini menunjukkan:

Luas segitiga Siku-siku

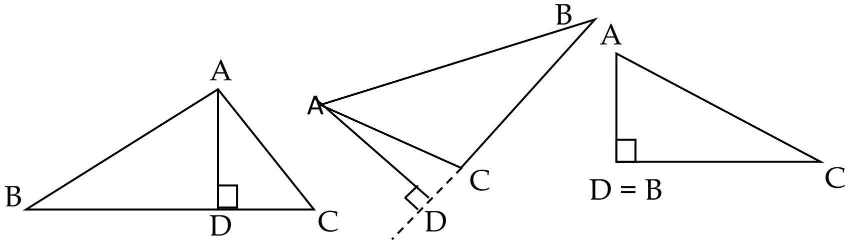
Daerah segitiga siku-siku

setengah dari panjang kaki

$A = ½hb$



Dari luas segitiga siku-siku, rumus untuk luas segitigapun bisa diturunkan. Ide garis tinggi sangat dibutuhkan. Dalam sebuah segitiga, garis tinggi adalah garis tegak lurus dari sebuah titik ke garis yang memiliki sisi berlawanan. Pada



Garis tinggi AD dalam ΔBC, D antara B dan C

Garis tinggi AD di luar ΔBC, D tidak terletak antara B dan C

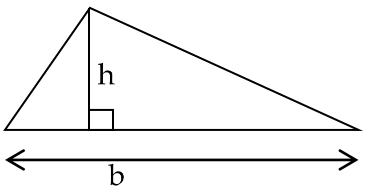
Garis tinggi AD pada ΔBC, D = B

Misalkan ΔABC diberikan dan anda tidak tahu bentuknya. Seperti yang ditunjukkan di atas, hanya ada tiga kemungkinan untuk garis tinggi dari A ke sisi $\overline{BC}$. Entah garis tinggi di dalam segitiga, di luar segitiga atau sisi segitiga. Dalam semua kasus, rumus yang sederhana untuk luas segitiga dapat disimpulkan.

Rumus Luas Segitiga

Luas segitiga adalah setengah hasil sisi alas dikalikan dengan tinggi sisi itu.

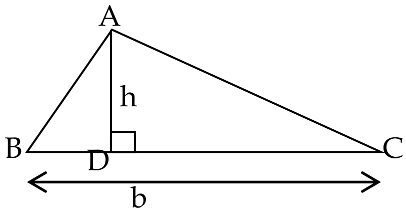
$$A = ½hb$$



Bukti:

Kami ingn luas segitiga ABC, yang berbentuk segitiga. Dalam setiap kasus di bawah, b adalah sisi alas segitiga dan h adalah garis tinggi ke sisi itu. Kami ingin menunjukkan pada semua bahwa Luas $\Delta ABC = ½\, hb$.

Cara I: Garis tinggi di dalam segitiga. Garis tinggi membagi ΔABC menjadi dua segitiga yang kongruen. Ambil $BD = x$ dan $DC = y$. maka $x + y = b$.



Luas ΔABC = Luas ΔABD + Luas ΔADC (penjumlahan luas)

$= ½hx + ½hy$ (rumus luas Δ)

$= ½\,(h + y)$ (distributif)

$= ½hb$ (substitusi)

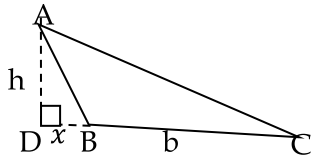
Cara II: Garis tinggi berada di luar segitiga. Luas ΔABC dapat diperoleh dengan mengurangkan.

Luas ΔABC = Luas ΔADC – luas ΔADB

$= ½\ h(x + b) - ½\ hx$

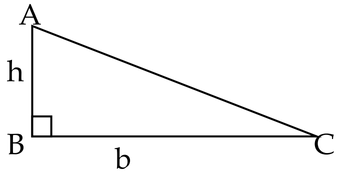
$= ½hx + ½hb - ½hx$

$= ½hb$



Cara III: Garis tinggi pada sisi segitiga. Dalam cara ini, segitiganya berupa segitiga siku-siku, jadi rumusnya

Luas $\Delta ABC\ =\ ½hb$



Dalam contoh, satuan tidak diberikan; Oleh karena itu, jawabannya diberikan dengan menggunakan istilah umum satuan persegi atau satuan^2.

Contoh 5.3

Diberikan titik koordinat $A(2, 5)$, $B(-2, 0)$, $C(3, 0)$, $D(2, 0)$, $E(6, 0)$. Tentukan luas:

a. ΔABC

b. ΔADE

c. ΔACE

Penyelesaian:

$\overline{AD}$ adalah garis tinggi dari setiap segitiga dan $AD = 5$ satuan

a. Luas $\Delta ABC\ =\ ½. BC. AD$

$=\ ½. |3 - (-2)|. 5$

$=\ ½. 5.5$

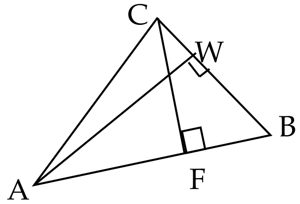
$= 12{,}5$

b. Luas ΔADE $= ½ . DE . AD$
$= ½ . |6 - 2| . 5$
$= ½ . 4 . 5$
$= 10$

c. Luas ΔACE $= ½ . CE . AD$
$= ½ . |6 - 3| . 5$
$= ½ . 3 . 5$
$= 7{,}5$

LATIHAN 5.4

1. Diketahui titik P(3, 6), Q(-2, 0), R(1, 0), S(6, 0) dan T(3, 0). Hitunglah luas
   a. ΔPQR
   b. ΔPRS
   c. ΔPQS
2. pendekatan sisi (dalam meter) dari ABC, bagian atap, seperti gambar di bawah ini.
   a. Berapakah keliling dari bagian atap ini?
   b. berapa luasnya?
3. Diberikan ΔABC dengan garis tinggi AW dan CF. Jika AB = 8, $CF = 6$ dan $AW = 7$, tentukan CB



4. Segienam ABCDEF memiliki titik-titik A(0, 12), B(11, 12), C(11, 4), D(9, 4), E(9, 0), dan F(0, 0). Tentukan luas $ABCDEF$.
5. Gunakan sebuah penggaris, kompas atau penggambar otomatis.

a. Gambarlah sebuah ΔABC, garis tinggi AB, BC dan AC dan perpanjang ketiga garis tinggi tersebut sehingga berpotongan.

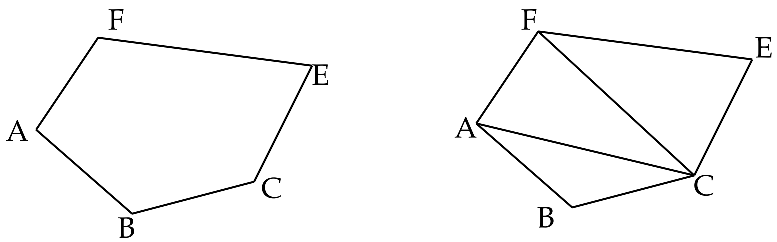
b. Ulangi perintah di atas dengan menggunakan segitiga dalam berbagai bentuk.

c. Berspekulasi saat garis tinggi berpotongan di dalam segitiga, saat berada di luar segitiga, dan pada ditik di segitiga.

E. Luas Trapesium

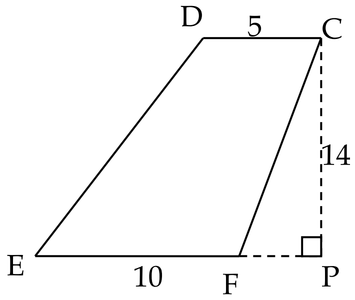
Mengetahui rumus untuk luas segitiga berguna karena segibanyak apapun dapat dipecah menjadi segitiga. Bila ini terjadi, dikatakan bahwa segibanyak telah di triangulasi. Di bawah segilima ABCDE di sebelah kiri telah disalin dan ditriangulasi di sebelah kanan.

Ide ini menyediakan sebuah algoritma untuk mendapatkan luas dari setiap segibanyak. Langkah 1: Triangulasi segibanyak. Langkah 2: Dapatkan luas segitiga masing-masing (dengan mengukur panjang sisi dan garis tinggi). Langkah 3: Tambahkan semua luas untuk memperoleh luas segibanyak.



Namun algoritma tidak sama dengan rumus. Tidak ada rumus umum untuk menghitung luas dari segibanyak, meskipun semua sisi-sisi dan ukuran sudutnya diketahui. Tapi jika segibanyak dapat dipecah menjadi segitiga dengan tinggi atau sisi dengan panjang yang sama, maka dapat diperoleh rumusnya. Suatu jenis segibanyak yang dapat dipecah dengan cara ini adalah trapesium. Sebuah bonus adalah bahwa rumus luas trapesium akan berlaku untuk semua jenis khususbentuk bersisi empat yang rendah dalam hirarki bentuk bersisi empat.

Inilah contoh cara mendapatkan luas trapesium. Dalam trapesium CDEF di bawah, diketahui panjang dua sisi yang sejajar (10 dan 5) dan tingginya CP= 14. Tinggi trapesium adalah jarak antara dua sisi yang sejajar. Ini sudah cukup untuk menentukan luasnya.



Pertama, pisahkan trapesium 14 menjadi segitiga CDE dan CEF. Apakah anda melihat bahwa setiap segitiga, mempunyai satu sisi dan tinggi sisi yang diketahui? Selanjutnya, dalam setiap kasus tingginya adalah 14. Sehingga daerah tersebut dapat ditemukan.

L. CDEF = Luas ΔCDE + luas ΔCEF

$= \frac{1}{2}(14.\ 5) + \frac{1}{2}(14.10)$

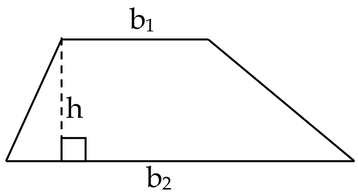
$= 35 + 70$

$= 105$

Ide dari contoh di atas dapat digunakan untuk menarik kesimpulan dari rumus untuk luas trapesium

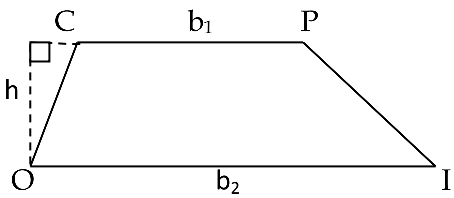
Rumus Luas Trapesium:

Luas dari trapesium sama dengan setengah kali dari tinggi dan jumlah dari panjang sisi dua sisi yang sejajarnya



$L = ½h\,(b_1 + b_2)$

Bukti :Gambar sebuah trapesium CPIO dengan tinggi h dan dua sisi yang sejajar b_1 dan b_2. Buktinya hanyalah generalisasi atau contoh yang mendahului teorema.



Luas CPIO = Luas ΔCOP + L ΔPIO (penjumlahan Luas)

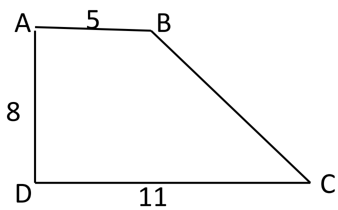
= ½h b_1 + ½h b_2 (rumus L Δ)

= ½h (b_1 + b_2) (distributif)

Disimbolkan, jika luas sebuah trapesium dengan dua sisi yang sejajar b_1 dan b_2 dan tingginya h, maka L = ½h (b_1 + b_2). Sebab sifat komutatif dari perkalian, ½h (b_1 + b_2) = h .½ (b_1 + b_2). Ingat bahwa ½ (b_1 + b_2) adalah rata-rata atau nilai tengah dari b_1 dan b_2. Jadi luas trapusium sama dengan perkalian tinggi dan nilai tengah dari dua sisi yang sejajarnya.

Contoh 5.4

Hitunglah luas segibanyak ABCD di bawah ini.

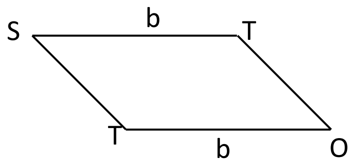


Penyelesaian:

Dari ciri-cirinya, Anda dapat menyimpulkan bahwa $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, ciri-ciri ABCD sebuah trapesium dengan b_1 = 5, b_2 =11 dan h = 8. Terapkan rumus luas trapesium.

L. ABCD = ½h ($b_1 + b_2$)
= ½ . 8 (5 + 11)
= 4 . 16
= 64

Sejak jajargenjang merupakan trapesium khusus, rumus trapesium diterapkan pada jajargenjang juga. Untuk contoh, SPOT adalah jajargenjang dengan tinggi h. Dalam jajargenjang, sisi yang berhadapan sama panjang, jadi $b_1 = b_2 = b$

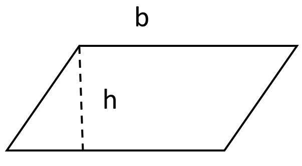


Luas SPOT = ½h ($b_1 + b_2$)
= ½h (b + b)
= ½h (2b)
= hb

Karena kedua sisi paralel dapat dianggap sebagai dua sisi yang sejajar, jajargenjang memiliki dua tinggi.

Rumus Luas jajargenjang:

Luas jajargenjang adalah hasil kali salah satu dua sisi yang sejajar dan tinggi untuk dua sisi yang sejajar itu.



$$L = hb$$

diberikan. Anda harus berhati-hati dalam memilah mana yang akan digunakan.

Contoh 5.5

Hitunglah luas jajargenjang ABCD

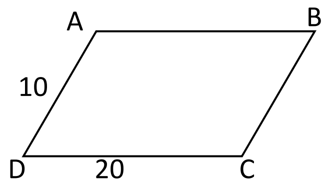
Pada sisi kanan

Penyelesaian:

Luas = hb

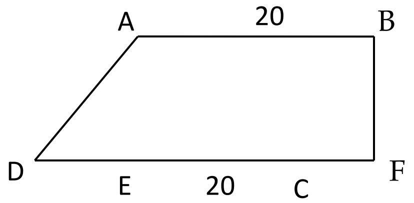
= 8 . 20

= 160 satuan^2



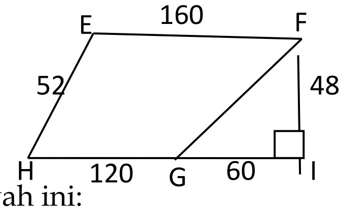
(Perhatikan bahwa sisi dengan panjang 10 tidak digunakan).

Cara lain untuk membuktikan rumus bidang jajargenjang adalah sebagai berikut. Pada contoh 2, pikirkan untuk memindahkan ΔADE ke kanan jajar genjang. Maka akan terbentuk sebuah persegi panjang . Luasnya sama dengan luas jajargenjang. Jadi luas jajar genjang adalah 160 satuan^2.

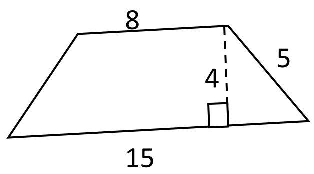


LATIHAN 5.5

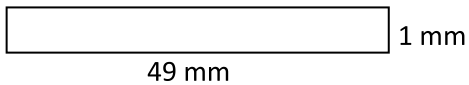
1. Uraikan algoritma untuk mendapatkan luas segibanyak berbagai bentuk!
2. Gunakan ganbar di sebelah
   a. Sebutkan sisi-sisi yang sejajar dan tinggi trapesium EFGH
   b. Tentukan luas EFGH.



3. Tentukan luas dari trapesium di bawah ini:



4. Hitung luas trapesium OABC dengan titik koordinat O(0, 0), A(5, 0), B(5, 7), dan C(1, 7).
5. Tentukan luas dari ΔKLM, dengan K(-2, 6), L(0, 0) dan M(5, 6)!
6. Gambar sebuah persegi panjang dengan keliling 100 mm dan luasnya kurang dari 50 mm^2.



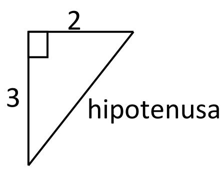
F. Teorema Pythagoras

Dari luas persegi anda dapat menemukan panjang dari beberapa sisi. Jika luasnya adalah A, maka panjang sisi samping adalah $\sqrt{A}$. Itulah sebabnya disebut akar kuadrat A.

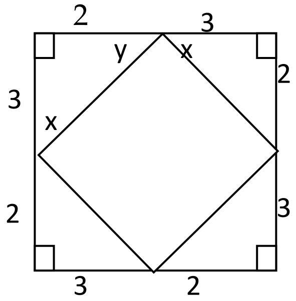
Dengan demikian jika luas kotak adalah 400 cm^2, sisinya memiliki panjang 20 cm. Jika luasnya 13 kaki, sisinya memiliki panjang $\sqrt{13}$ kaki. Anda dapat memverifikasi yang terakhir ini dengan kalkulator: $\sqrt{13}$. $\sqrt{13}$ = 3, 6055513 . 3,6055513 = 13.

Ide ini, luas itu bisa memberitahu anda sesuatu tentang panjangnya, digunakan oleh ahli bahasa Yunani Pythagorasin pada abad ke 6 SM. Untuk mendapatkan teorema yang dinamai namanya. Teorema Pythagoras memungkinkan anda menemukan panjang sisi miring segitiga siku-siku jika anda tahu panjang kakinya. Ini adalah teorema yang terkenal dan kebanyakkan siswa pernah melihatnya sebelum mempelajari geometri.

Tapi pertama-tama bayangkan bahwa anda tidak tahu teorema ini. (Ini akan mudah jika sebenarnya bukan!). Misalkan diketahui segitiga siku-siku dengan panjang kaki 2 dan 3 satuan. Ada beberapa cara untuk dapat menemukan panjang sisi miring. Anda bisa menggambar segitiga siku-siku dan memperkirakan panjang sisi miring dengan mengukur. Di bawah ini segitiga siku-siku dengan panjang sisi 2 cm dan 3 cm. Anda dapat mengukur sisi miringnya. Anda harus mendapatkan sekitar 3,6 cm.



Jawaban yang pasti dapat ditemukan adalah prosedur ysng diilustrasikan di bawah ini. Terjemahkan segitiga 5 cm di sepanjang sisi 3 cm. Di bawah terjemahan ini, bayangan P adalah P^1. Kemudian putar bayangan segitiga 90^0 sekitar P^1. Lakukan proses ini dua kali lebih banyak dan anda mendapatkan sosok seperti itu. Pengukuran sudut x dan y menambah 90^0, jadi sudut dan sosok tengah (teduh) adalah sudut siku-siku. Semua sisi daerah yang teduh itu persegi.

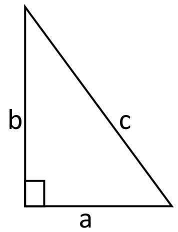


Tentu saja sosok besar dan garis besar itu juga persegi. Luasnya 5 . 5 atau 25. Masing-masing sudut segitiga memiliki ½ . 2. 3 atau 3, Jadi keempat sudutnya memiliki luas 12. Luas persegi yang dalam adalah 13. Jadi sisi-sisinya persegi sama dengan $\sqrt{13}$.

Sisi segitiga siku-siku dengan demikian 2, 3, dan $\sqrt{13}$ Perhatikan bahwa $2^2 + 3^2 = (\sqrt{13})^2$. Hubungan umum adalah Teorema Pythagoras, dan buktinya melibatkan prosedur yang sama seperti di atas, kecuali dengan a dan b bukan 2 dan 3.

Teorema Pythagoras

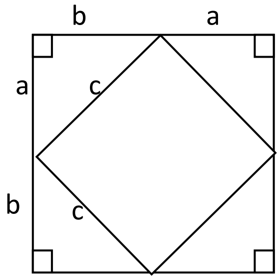
Segitiga siku-siku dengan kaki a dan b dan sisi miring c.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Bukti:

Segitiga asli dengan gambar translasi dan rotasinya di bawah ini. Kakinya adalah a dan b dan sisi miringnya adalah c. Luas persegi yang dalam adalah c^2. Sekarang kita menemukan luas yang teduh dengan cara kedua



Sisi persegi luar (besar) = a + b

Luas persegi luar (besar) = $(a + b)^2$

Masing-masing dari empat sudut segitiga memiliki luas ½ ab.

Jadi luas persegi dalam (kecil) adalah :

$(a + b)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} ab = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$

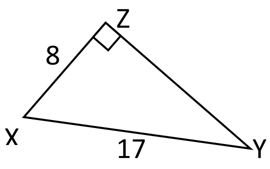
$= a^2 + b^2$

Jika luas persegi dalam (kecil) adalah c. Jadi $c^2 = a^2 + b^2$.

Teorema Pythagoras berguna dalam berbagai macam masalah.

Contoh 5.6

Hitunglah panjang YZ pada gambar di bawah ini



Penyelesaian:

Dari Teorema Pythagoras, $(xz)^2 + (yz)^2 = (xy)^2$

Jadi $8^2 + yz^2 = 17^2$

$64 + yz^2 = 289$

$yz^2 = 289 – 64$

$= 225$

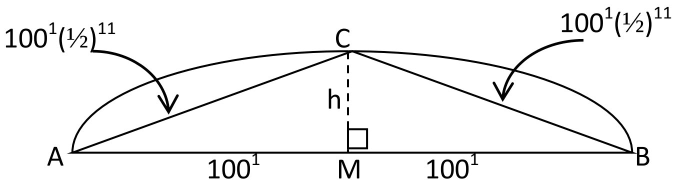
$yz = 15$

Bahan cenderung melebarsaat dipanaskan. Rel jalan dan rel kereta api harus dibangun dengan beberapa peralatan untuk memungkinkan ekspansi lebih dari yang dipikirkan kebanyakan orang. Seperti yang dapat ditunjukkan oleh teorema Pythagoras.

Contoh 5.7

Seandainya rel panjang 200 kaki AB di gambar) kokoh berlabuh di kedua ujungnya. Pada hari yang panas, rel semacam itu bisa melebar 1 inci, menyebabkannya goyah. Meskipun mungkin melengkung, seperti yang ditunjukkan di bawah ini dalam gambar yang dilebih-lebihkan, gunakan segitiga siku-siku (ΔAMC) untuk memperkirakan jarak yang dilewati keluar dari jalur lurus

Penyelesaian :



Pertama buatlah satuan yang sama. Satuan inci lebih mudah.

$100^1 = 1200^{11}$ dan 100^1 $(½)^{11}$ =1200,5.

Gunakan teorema Pythagoras dalam ΔAMC.

$$AM^2 + MC^2 = AC^2$$

$$1200^2 + h^2 = 1200{,}5^2$$

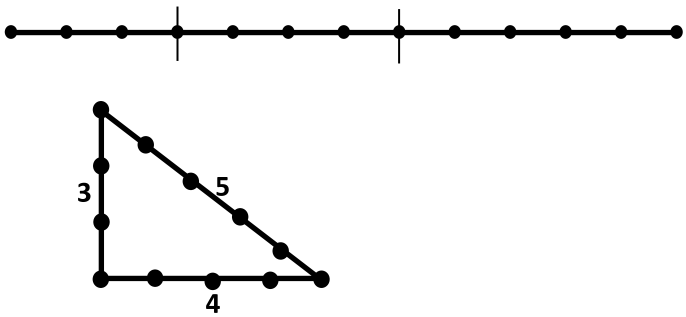
$$1.440.000 + h^2 = 1.441.200{,}25$$

$$h^2 = 1.200{,}25$$

$$h = \sqrt{1200{,}25} \text{ atau } 35 \text{ inci}$$

Lintasannya akan melengkung hampir 3 kaki! Untuk alasan ini, sambungan ekspansi diletakkan di trek. Mereka memberi ruang bagi rel untuk berkembang.

Untuk membuat segitiga siku-siku, orang Mesir purba mengambil seutas tali dengan simpul yang sama jaraknya didalamnya dan kemudian membungkuk di dua tempat untukmembentuk segitiga dengan panjang sisi 3, 4, dan 5.



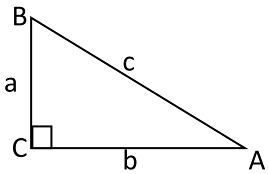
Apakah ini bekerja , atau hanya dekat? Di sini kita tahu $3^2 + 4^2 = 5^2$, dan bertanya-tanya apakah segitiga itu benar. Ini adalah contoh dari kebalikkan teorema Pythagoras. Karena kebalikan dari sebuah teorema belum tentu benar, kebenarannya perlu diperiksa. Seperti yang terjadi, kebalikkannya ini benar. Ia menggunakan teorema Pythagoras itu sendiri dan SSS teori kongruensi.

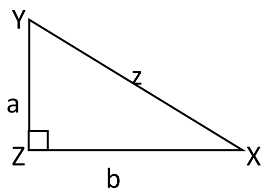
Teorema Kebalikan Pythagoras

Jika sebuah segitiga mempunyai sisi yang panjangnya a, b, dan c, dan $a^2 + b^2 = c^2$, maka segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku.

Bukti :

Di sebelah kanan adalah segitiga ABC dengan panjang sisi a, b, dan c dan dengan $c^2 = a^2 + b^2$. Tujuannya adalah untuk membuktikan bahwa ΔABC adalah segitiga siku-siku. Pertimbangkan ΔXYZ yang tepat dengan kakiyang panjang a dan b.





Oleh teorema Pythagoras, di dalam ΔXYZ, $a^2 + b^2 = z^2$

tetapi itu diberikan $a^2 + b^2 = c^2$

oleh substitusi, $z^2 = c^2$

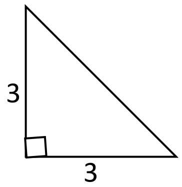
Mengambil akar kuadrat positif dari masing-masing sisi $z = c$

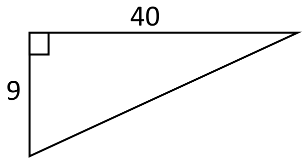
Dengan demikian, dengan kesesuaian sss, $\Delta ABC \approx \Delta XYZ$. Jadi, oleh CPCF.

Teorema, $\angle C$ adalah sudut tegak lurus dan dengan demikian ΔABC adalah segitiga siku-siku.

LATIHAN 5.6

1. Hitunglah sisi miring dari setiap segitiga siku-siku di bawah ini:

a. 

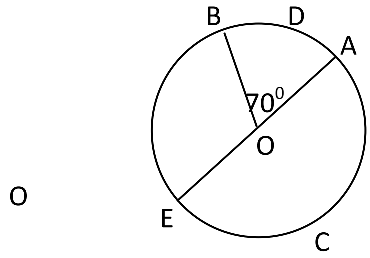
b. 

2. Satu set tiga angka yang bisa jadi sisi segitiga siku-siku disebut tripel pythagoras. Tentukan manakah yang merupakan tripel pythagoras.
   a. 3, 4, 5
   b. 14, 8, 17
   c. 70, 24, 74
   d. 10,24, 26
3. Satu kaki segitiga siku-siku dua kali panjang yang lain. Berapa kali lebih besar dari kaki yang lebih kecil sisi miringnya?
4. Jelaskan bagaimana rumus las jajargenjang disimpulkan dari rumus luas trapesium?
5. Sebuah persegi panjang mempunyai luas 12 dan keliling 26. Tentukan panjang sisi-sisi dari persegi panjang tersebut!

G. Pengukuran Busur dan Panjang Busur

Sebuah lingkaran dengan pusat O ditarik di sebelah kiri. Misalkan anda berjalan di sepanjang lingkaran berlawanan arah jarum jam dari A ke B. Bagian lingkaran yang telah anda jalani adalah busur AB, ditulis $\widehat{AB}$.

Ukuran busur AB diberikan dalam derajat, dan sama dengan ukuran sudut tengah AOB. Dengan demikian, ukuran busur $\widehat{AB}$ adalah 70^0. Artinya, dari A sampai B anda telah berjalan 70^0 mengelilingi lingkaran. Ini menunjukkan seberapa banyak anda telah berbalik dan bagian lingkaran 360^0 ang anda lewati. Jika anda berjalan ke arah lain (searah jarum jam) dari A ke C ke B, anda pasti sudah berputar 290^0 mengelilingi lingkaran.



Sekarang kita mendefinisikan istilah ini lebih tepatnya. Sudut-sudut lingkaran adalah sudut yang simpulnya adalah pusat lingkaran. Jadi, bila A dan B adalah titik pada lingkaran O, maka $\angle AOB$ adalah sudut pusat. Bila $\angle AOB$ bukan sudut lurus, titik pusat lingkaran O yang berada pada atau bagian dalam $\angle AOB$ merupakan busur minor $\widehat{AB}$. Titik A dan B adalah titik akhir busur.

Titik pusat lingkaran O yang pada atau bagian luar $\angle AOB$ merupakan busur utama lingkaran O. Di atas, busur ini diberi nama $\widehat{ACB}$. Titik ketiga C disertakan untuk membedakan busur utama dari busur $\widehat{ACB}$ ke busur kecil $\widehat{AB}$. Untuk penjelasan tambahan, busur kecil di atas juga bisa digambarkan sebagai $\widehat{ADB}$.

Bila sudut tengah adalah sudut lurus, maka busurnya disebut setengah lingkaran. Di atas $\angle AOE$ adalah sudut lurus, dan keduanya ACE dan ABE adalah setengah lingkaran.

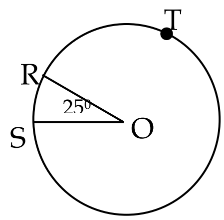
> **Definisi 5.2**
>
> Ukuran busur derajat kecil atau setengah lingkaran $\widehat{AB}$ dari lingkaran O, ditulis $m\widehat{AB}$, adalah sudut tengah $\widehat{AOB}$.

Ukuran busur derajat besar ACB atau lingkaran O, ditulis $m\widehat{ACB}$, adalah $360^0 - m\widehat{AB}$.

Contoh 5.7

Di dalam lingkaran dengan pusat O Seperti pada gambar di sebelah kanan, Tentukan: a. $m\widehat{RS}$

b. $m\widehat{RTS}$

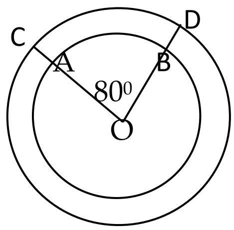


Penyelesaian:

a. $m\widehat{RS} = m\angle ROS = 25^0$

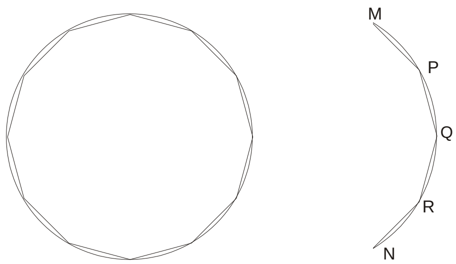
b. $m\widehat{RTS} = 360^0 - m\widehat{RS} = 360^0 - 25^0 = 335^0$

Di bawah, di dua lingkaran yang kosntris dengan pusat O, busur AB dan CD memiliki ukuran derajat yang sama dengan m<O : mAB = mCD= 80^0. Namun jika anda berjalan dari C ke D, anda akan berjalan lebih jauh daripada jika anda berjalan dari A ke B. Busur AB dan busur CD memiliki panjang yang berbeda. Panjang busur tidak sama dengan ukuran busur. Panjang busur menunjukkan jarak; sedangkan ukuran busur menggerogoti sejumlah belokan.



Pada lingkaran yang lebih besar, panjang CD adalah jarak yang diukur pada satuan linier seperti cm atau inci, namun mCD diukur dalam derajat. Satuan ukurannya berbeda. Untuk menghindari kebingungan, dalam buku ini kita selalu menempatkan tanda derajat sebuah busur.

Panjang busur bisa diestimasi dengan menggambar seutas tali. Tali adalah segmen yang titik akhirnya berada pada lingkaran tertentu. Di bawah, panjang MN didekati oleh MP + PQ + QR + RN. Dengan menggambar lebih banyak dan banyak garis, panjang total garis tersebut mendekati panjang busur sebagai batas. Jika ini dilakukan dengan seluruh lingkaran. Istilah lingkar adalah adalah sinonim untuk keliling lingkaran. Itu adalah seberapa jauh anda akan pergi jika anda berjalan di sekitar lingkaran Perbandingan keliling lingkaran C terhadap diameter D adalah sama pada semua lingkaran. Jika dilambangkan huruf yunani π (baca : phi).



Definisi 5.3

$\pi = \frac{C}{d}$, dimana C adalah keliling lingkaran dan d adalah diameter lingkaran

Jumlah π adalah irrasional; π tidak dapat ditulis sebagai desimal yang terbatas atau berulang atau sebagai pecahan sederhana. Desimal untuk π tidak terbatas. Berikut adalah 50 tempat desimal pertama.

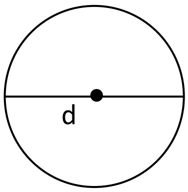
3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510

Kalkulator paling ilmiah memiliki kunci untuk π dengan 6 atau 8 tempat desimal. π adalah sekitar 3,14159 atau sekitar 22/7.

Memecahkan persamaan yang menentukan $\pi = \frac{C}{d}$, dimana C adalah keliling lingkaran untuk setiap lingkaran.

Rumus Keliling Lingkaran:

Jika keliling lingkaran adalah C dan diameter d, maka $C = \pi$ d.



Gantilah d dengan 2r, maka rumus akan menjadi $C = 2\pi r$. Substitusikan π dengan 3,14 dalam rumus keliling lingkaran maka hasil yang diperoleh $C \approx 3{,}14$ d.

Dalam situasi nyata, perkiraan yang anda gunakan untuk π bergantung pada keakuratan data. Pada contoh 2, informasi yang diberikan tidak menjamin perkiraan yang lebih dekat dari pada 3,14.

Contoh 5.8

Sebuah sepeda gunung memiliki roda dengan diameter 22 inci. Jika pengendara dalam 1 menit memperoleh 300 putaran, berapakah jarak yang ditempuh oleh sepeda gunung selama 1 menit ?

Penyelesaian:

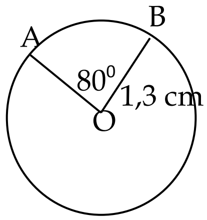
Satu kali putaran, jarak yang ditempuh adalah C ≈ 3,14 . 22 =69,08 inci

Dalam 300 putaran, jarak yang ditempuh adalah 300 . 69,08 = 20,724 inci.

Anda dapat menghitung panjang busur jika anda tahu jari-jari dan ukuran derajat busurnya.

Contoh 5.9

Dalam lingkaran dengan pusat O, OB = 1,3 cm dan m< AOB = 80^0. Hitung panjang AB.



Penyelesaian :

$m\angle AOB$ = 80^0, jadi $m\widehat{AB}$ = 80^0. Dengan demikian AB mencakup (80/360) dari keseluruhan keliling lingkaran dengan pusat O. Jadi:

AB = (80/360) . C

= (80/360) . 2πr

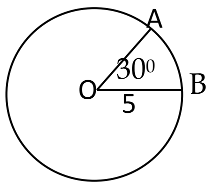
= (80/360) . 2 . π. 1,3

= 208 π /360

≈ 1,8 cm

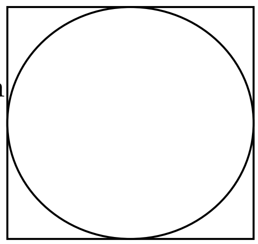
LATIHAN 5.7

1. Sebuah lingkaran dengan pusat O seperti gambar di bawah ini, m$\overset{\frown}{AB}$ = 30^0, tentukan panjang busur AB!



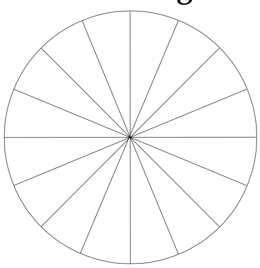
2. Dinding persegi 10 meter di dalamnya terdapat kolam melingkar. Berapa keliling kolam tersebut?

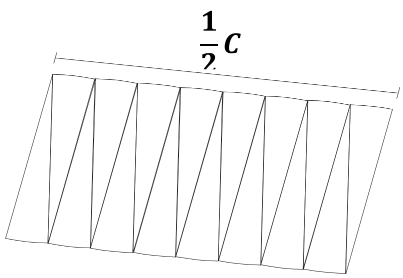
10 cm



3. Misalkan dibutuhkan waktu 110 detik untuk berjalan mengelilingi taman melingkar. Pada tingkat ini, kira-kira berapa lama waktu yang anda butuhkan untuk berjalan lurus melewati kebun sepanjang diameter? *35 detik*.

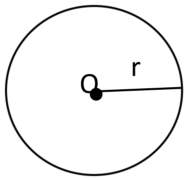
H. Luas Lingkaran





Rumus Luas Lingkaran:

Luas lingkaran L dengan jari-jari r adalah L = πr^2.



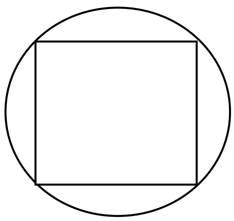
Bukti:

Gunakan gambar lingkaran yang dipecah menjadi irisan dan disusun kembali mendekati jajargenjang.

Kesimpulan	Dasar Kebenaran
Luas lingkaran = mendekati luas jajargenjang	Kesesuaian dan sifat penjumlahan luas
$= h \cdot b$	luas jajargenjang
$= r \cdot \frac{1}{2} C$	Substitusi
$= r \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi r$	Definisi keliling lingkaran
$= r \cdot \pi r$	Asosiatif perkalian
$= \pi r$	Definisi eksponen

Contoh 5.9

Lingkaran ditarik melalui empat simpul persegi dengan sisi 7 cm.
a. Jika anak panah dilempar secara acak ke dalam lingkaran, berapakah probabilitas bahwa panah itu di persegi?
b. Perkiraan luas daerah yang terdapat antara persegi dan lingkaran



Penyelesaian:

a. Anak panah mendarat di persegi probabilitasnya sama dengan

$$\frac{\text{Luas persegi}}{\text{Luas Lingkaran}}$$

Luas persegi adalah 7^2 cm^2, atau 49 cm^2. Untuk luas lingkaran, temukan jari-jarinya dahulu. $r^2 + r^2 = 7^2$. maka $2r^2 = 49$, jadi $r^2 = \frac{49}{2}$ cm.

Luas lingkaran adalah πr^2 atau $\frac{49\pi}{2}$ cm^2. Dengan demikian kemungkinannya adalah $\frac{49}{\frac{49\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$.

Dengan kalkulator $\frac{2}{\pi} = 0{,}64$, Jadi probabilitasnya sekitar 64%.

Luas lingkaran sekitar 64% berada dalam persegi.

b. Luas bayangan = Luas lingkaran – luas persegi

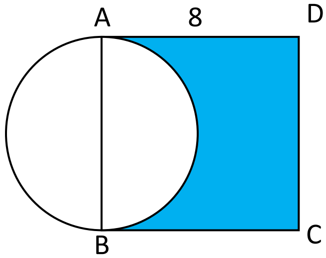
$= \frac{49\pi}{2} - 49$

$= 77 - 49$

$= 28$ cm^2

LATIHAN 5.8

1. Luas lingkaran = 144π. Tentukan:
   a. jari-jari
   b. diameter
2. ABCD di bawah ini adalah persegi dengan sisi 8 dan AB adalah diameter lingkaran.

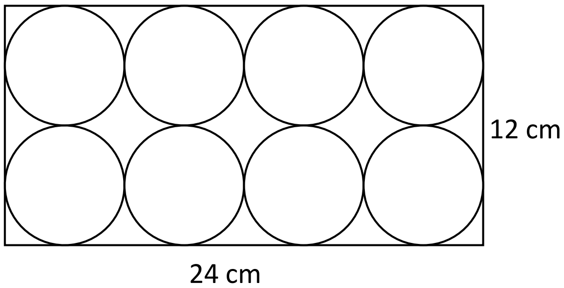


a. Tentukan luas daerah bayangan.
b. Tentukan keliling dari daerah bayangan!
3. Delapan cakram logam melingkar, yang dipotong dari potongan besi 12 cm x 24

cm

a. Berapa banyak logam yang terbuang?

b. Berapa % dari logam terbuang?

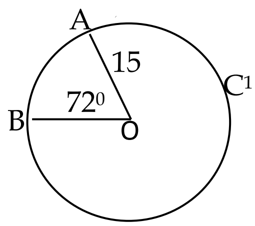


4. Dalam lingkaran berpusat di O, tampak seperti gambar di bawah ini, OA = 15 dan m<AOB =72

a. Hitunglah mAB. Jawab : *72^0*

b. Hitunglah sisi dari AB.

Jawab : 6π = 18,8 sat



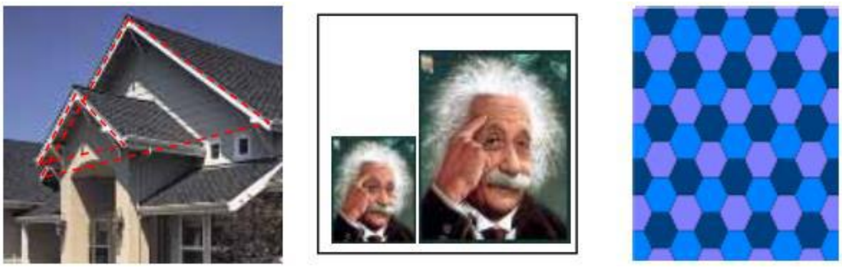
BAB VI
KESEBANGUNAN

A. Pengantar

Pada materi sebelunya, Kita telah membahas tentang masalah kekongruenan bangun datar. Pada prinsipnya, kesebangunan hampir sama dengan kekongruenan. Sebelumnya, coba perhatikan gambar berikut!

Gambar 6.1

Perhatikan benda-benda atau bentuk-bentuk di sekitar kita. Pernahkah Anda memikirkan bahwa benda tersebut terkait dengan suatu kosep dalam matematika? Amati ketiga gambar di bawah ini.



Gambar 6.2

Jika dicermati dua segitiga pada gambar paling kiri dan dua foto Einstein pada gambar di tengah maka akan tampak adanya dua **bentuk yang sama** tetapi ukurannya berbeda. Sedangkan untuk ubin-ubin segilima beraturan pada gambar paling kanan menunjukkan adanya **bentuk serta ukuran** yang sama. Kesamaan bentuk berkaitan dengan konsep kesebangunan sedangkan kesamaan bentuk dan ukuran berkaitan dengan konsep kekongruenan.

B. Konsep Kesebangunan dan Perbandingan

Kata "sebangun" digunakan dalam geometri untuk mendeskripsikan dua bangun yang mempunyai bentuk yang identik tetapi ukurannya tidak harus sama. Definisi kesebangunan dapat digunakan dalam sudut dan perbandingan jarak.

Dalam aljabar, Anda mungkin mengetahui beberapa masalah seperti berikut.

$$\frac{2}{13} = \frac{x}{26}, \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \qquad \frac{3}{x-5} = \frac{1}{3y+2}$$

Pesamaan yang ditulis dalam bentuk seperti di atas dinamakan perbandingan. Sebuah perbandingan merupakan suatu kesamaan dari dua rasio. Contohnya, pada perrbandingan $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, rasionya $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ mempunyai nilai numeric yang sama. Konsep ini sekarang akan dibahas secara lebih luas dan mendalam pada materi ini.

Definisi 6.1 (Sebanding)

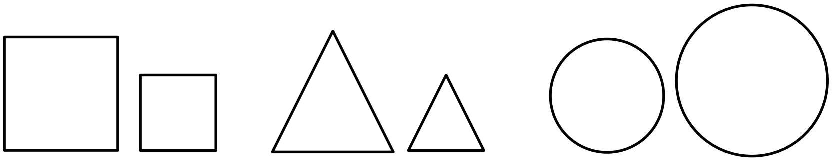
Diketahui dua barisan bilangan positif $a, b, c, \ldots$ dan $p, q, r, \ldots$ jika $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \cdots$ maka barisan $a, b, c, \ldots$ dan $p, q, r, \ldots$ disebut sebanding

Definisi 6.2 (Rata-rata geometri)

Jika a, b, c bilangan positif dan $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, maka b disebut sebagai rata-rata geometri dai a dan c.

C. Kesebangunan dalam Poligon

Dua poligon dikatakan sebangun jika keduanya mempunyai bentuk yang sama tetapi ukurannya tidak harus sama. Perhatikan gambar bangun-bangun berikut!



Gambar 6.3

Pada gambar di atas, setiap pasang bangun mempunyai bentuk yang sama tetapi dengan ukuran yang berbeda sehingga pasangan bangun-bangun di atas dinamakan sebangun. Jika dua bangun dikatakan kongruen, maka bangun tersebut pasti sebangun. Akan tetapi jika dua bangun dikatakan sebangun, maka dua bangun tersebut belum tentu kongruen.

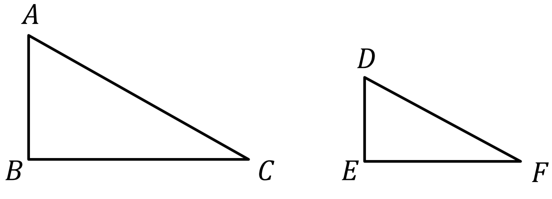
Symbol ~ berarti "sebangun dengan" yang digunakan ketika membicarakan dua atau lebih poligon yang sebangun. Sebagai contoh, untuk menyatakan $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, maka hal ini berarti

$$\angle A \cong \angle D, \qquad \angle B \cong \angle E, \qquad \angle C \cong \angle F$$

dan

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k$$

dengan k adalah sebuah bilangan real.



Gambar 6.4

Konstanta k dinamakan konstanta proporsional. Jika $k > 1$, maka ΔABC lebih bersar dari ΔDEF. Jika $0 < k < 1$, maka ΔABC lebih kecil dari ΔDEF. Dan jika $k = 1$, maka kedua segitiga tersebut kongruen.

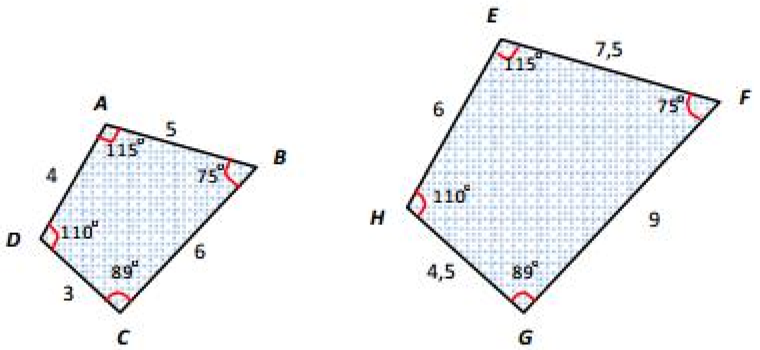
Karena kesebangunan geometri lebih bergantung pada bentuk daripada ukuran, bangun-bangun yang sebangun memiliki sudut-sudut yang kongruen dan sisi-sisi yang sebanding, tidak harus kongruen. Hubungan antara kesebangunan dan perbandingan dirumuskan dalam definisi berikut.

Definisi 6.3 (Kesebangunan)

Dalam suatu kesesuaian antara dua poligon, jika sudut-sudut bersesuaiannya kongruen dan sisi-sisi yang bersesuaian sebanding, maka kesesuaian itu disebut sebagai kesebangunan, dan dua poligon itu dinamakan sebangun.

Contoh 6.1

Diberikan dua bangun segiempat seperti gambar di bawah.



Kita bentuk pengaitan satu-satu antar titik-titik sudut di kedua segiempat tersebut, yaitu: $A \leftrightarrow E, B \leftrightarrow F, C \leftrightarrow G$, dan $D \leftrightarrow H$. Pengaitan seperti ini disebut dengan korespondensi satu-satu. Korespondensi satu-satu ini menghasilkan:

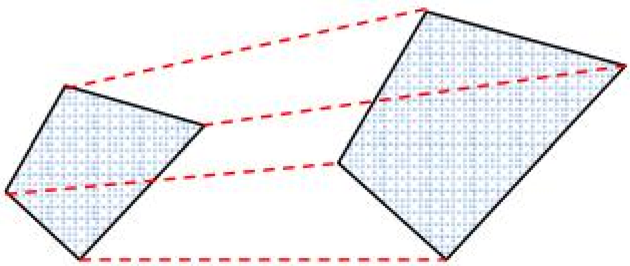
- Sudut-sudut yang bersesuaian sama besar yaitu:

$\angle DAB \cong HEF, \angle ABC \cong HEFG, \angle BCD \cong \angle FGH$, dan $\angle CDA \cong GHF$

- Semua perbandingan panjang sisi-sisi yang bersesuaian sama, yaitu:
$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = \frac{2}{3}$$

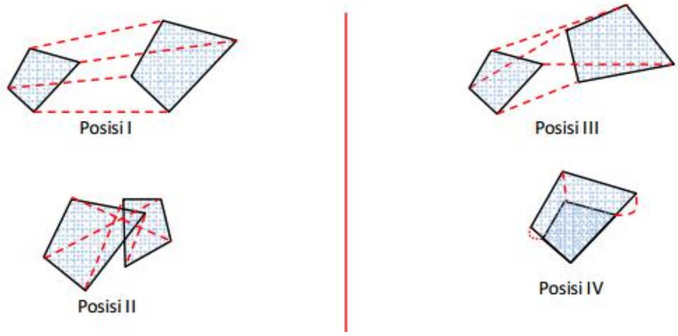
Sesuai definisi dapat disimpulkan bahwa segiempat $ABCD$ sebangun dengan segiempat $EFGH$ dan dapat ditulis dengan segiempat $ABCD \sim EFGH$.

Untuk lebih jelasnya, amatilah ilustrasi berikut!



Gambar 6.5

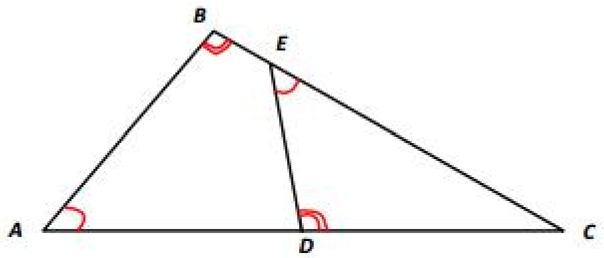
Perhatikan bahwa korespondensi yang menjadikan dua bangun datar sebangun tidak terpengaruh oleh posisi kedua bangun. Sekali telah ditemukan korespondensi satu-satu maka posisi apapun tetap sebangun. Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut!



Gambar 6.6

Pada masing-masing posisi, amatilah semua pasangan titik yang dihubungkan dengan garis terputus. Cocokkan ukuran sudut dan sisinya. Apakah ada di antara keempat posisi yang menjadikan kedua bangun menjadi tidak sebangun lagi? Tentu saja tidak ada.

Selanjutnya perhatikan gambar di bawah!



Gambar 6.7

Apakah$\Delta ABC \sim \Delta DEC$? Mungkin saja banyak yang menduga ΔABC tidak sebangun dengan $\sim \Delta DEC$. Oleh karena itu perlu suatu teorema sebagai jalan pintas (*shortcut*) untuk mengetahui kesebangunan.

D. Garis Sejajar dan Kesebangunan

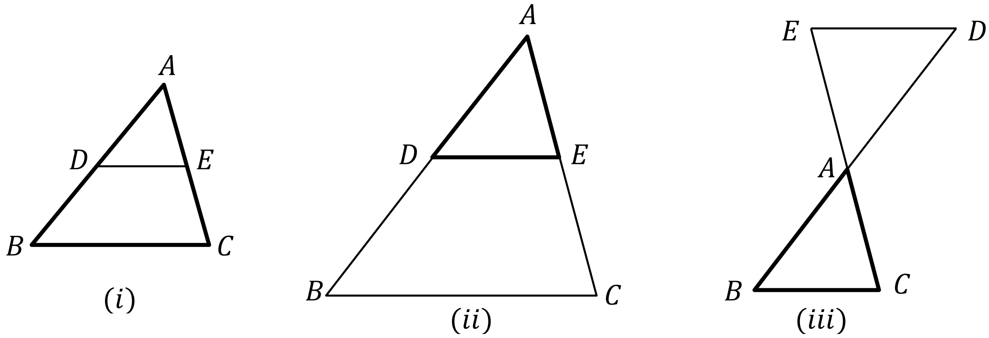
Terdapat hubungan yang erat antara garis-garis sejajar dan kesebangunan.

Lemma 6.1

Pada ΔABC, andaikan titik D dan E berturut-turut titik pada $\overline{AB}$ dan $\overline{AC}$, dan $\overline{DE}$ sejajar $\overline{BC}$, maka

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Gambar berikut mengilustrasikan tiga bentuk yang mungkin bisa terjadi.

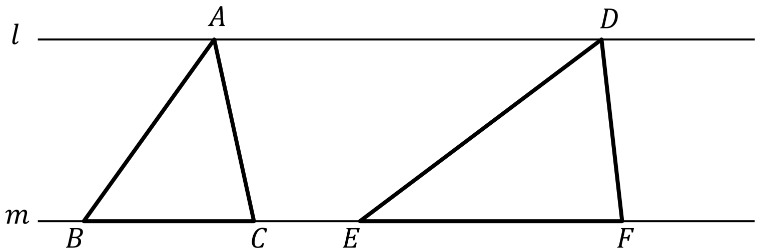


Gambar 5.3

Dalam membuktikan lemma di atas, menggunakan luas daerah.

Teorema 6.1

Diberikan dua garis sejajar l dan m dan dua segitiga yang masing-masing alasnya pada satu garis dan titik satunya pada garis yang lain, perbandingan luas daerah segitiga sama dengan perbandingan panjang sisi alas segitiga tersebut.



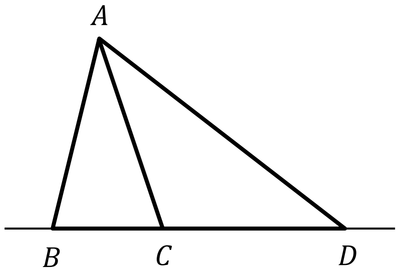
Gambar 6.4

Berdasarkan gambar di atas, teorema dapat dinyatakan sebagai

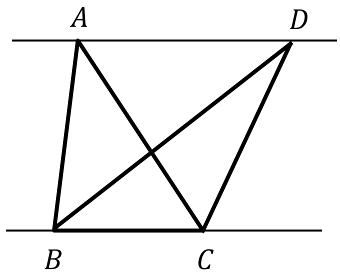
$$\frac{[ABC]}{[DEF]} = \frac{BC}{EF}$$

Perhatikan bahwa kurung siku menyatakan sebagai luas daerah, misalnya $[ABC]$ berarti luas daerah ΔABC.

Tedapat dua kasus khusus yang sangat berarti dan dilustrasikan dalam gambar berikut ini.

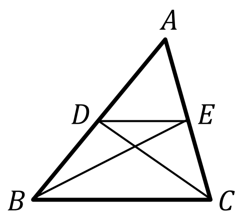


$\frac{[ABC]}{[ACD]} = \frac{BC}{CD}$



$[ABC] = DBC]$

Sehingga kita bisa membuktikan Lemma 5.1(i). buktinya adalah sebagai berikut.



Diketahui:

Segitiga ΔABC dan titik D, E berturut-turut pada $\overline{AB}$ dan $\overline{AC}$ sehingga $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Buktikan:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Bukti:

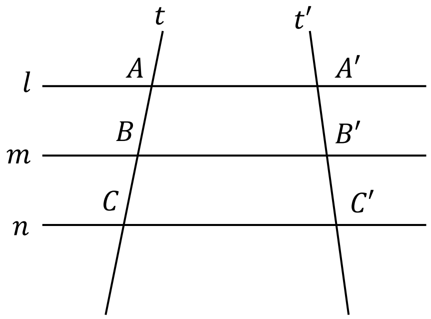
Langkah	Pernyataan	Alasan
1	$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$	Premis
2	Konstruksi BE	Konstruksi
3	Konstruksi DC	konstruksi
4	$[BDE] = [CDE]$	Teorema 5.1
5	$\frac{[ADE]}{[BDE]} = \frac{AD}{BD}$	Teorema 5.1
6	$\frac{[ADE]}{[CDE]} = \frac{AE}{CE}$	Teorema 5.1
7	$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$	Langkah 4,5,6

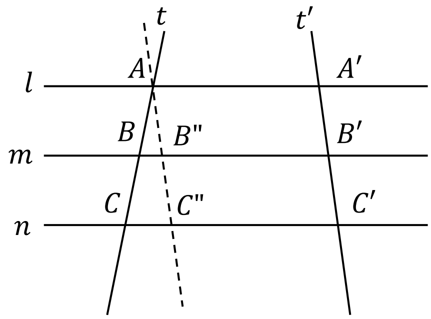
Perluasan Lemma 6.1 adalah sebagai berikut

Teorema 6.2

Proyeksi garis yang paralel mempertahankan rasio. Misalkan $l, m,$ dan n adalah garis-garis sejajar yang dipotong oleh garis transversal t dan t' berturut-turut pada titik A, B, C dan A', B', C'. Maka

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$





Diketahui:

$l, m,$ dan n adalah garis-garis sejajar yang dipotong oleh garis transversal t dan t' berturut-turut pada titik A, B, C dan A', B', C'

Buktikan:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Bukti:

Langkah	Pernyataan	Alasan
1	$l \parallel m \parallel n$	Premis
2	Konstruksi k yang sejajar t'	Konstruksi
3	$AA'B'B"$ sebuah jajargenjang	Langkah 2
4	$B'B'C'C"$ sebuah jajargenjang	Langkah 2
5	$AB" = A'B'$	Langkah 3
6	$B\mathrm{C} = B'C'$	Langkah 4

Langkah	Pernyataan	Alasan
7	$\frac{AB}{BC}=\frac{AB'}{B'C'}$	Lemma 5.1

Teorema 6.3

Pada ΔABC, misalkan $\overline{DE}$ sejajar $\overline{BC}$. Jika titik D dan E berturut-turut pada $\overline{AB}$ dan $\overline{AC}$, maka $\Delta ABC{\sim}\Delta ADE$.

Diketahui:
ΔABC, misalkan $\overline{DE}$ sejajar $\overline{BC}$ dan titik D dan E berturturt-turut pada $\overline{AB}$ dan $\overline{AC}$.

Buktikan:
$\Delta ABC{\sim}\Delta ADE$

Bukti:

Langkah	Pernyataan	Alasan
1	$DE \parallel BC$	Premis
2	D pada $\overline{AB}$	Diketahui
3	E pada $\overline{AC}$	Diketahui
4	$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$	Lemma 3.1
5	$\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$	Langkah 4
6	$\frac{AD+DB}{AD}=\frac{AE+EC}{AE}$	Langkah 2,3, 4,5
7	$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$	Langkah 6
8	Konstruksi $EF \parallel AB$, dengan F pada $\overline{AC}$	Konstruksi
9	$DE = BF$	Langkah 8

Langkah	Pernyataan	Alasan
10	$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BF}$	Langkah 6,7,8
11	$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$	Langkah 9,10
12	$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$	Langkah 7,11
13	$\Delta ABC \sim \Delta ADE$	Langkah 12

Lemma 6.2

Diberikan P dan Q berturut-turut berada pada AB dan AC. Jika $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC'}$, maka PQ sejajar BC.

Bukti diberikan sebagai latihan!

Kongruensi dan kesebangunan keduanya merupakan relasi yang ekuivalen. Relasi-relasi yang berlaku untuk kongruensi dan kesebangunan adalah

1. Reflektif.
   $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$
   $\Delta ABC \sim \Delta DEF$
2. Simetris
   Jika $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, maka $\Delta DEF \equiv \Delta ABC$
   Jika $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, maka $\Delta DEF \sim \Delta ABC$
3. Transitif
   Jika $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ dan $\Delta DEF \equiv \Delta GHI$, maka $\Delta ABC \equiv \Delta GHI$
   Jika $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ dan $\Delta DEF \sim \Delta GHI$, maka $\Delta ABC \sim \Delta GHI$

E. Hal Lain yang Mengisyaratkan Kesebangunan

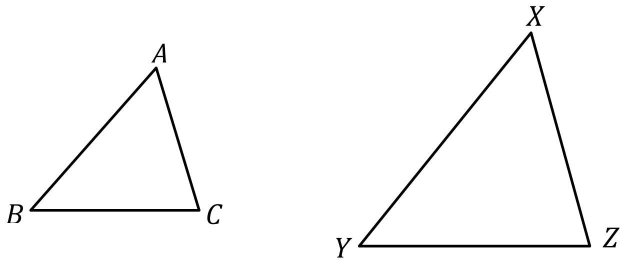
Berdasarkan definisi, dua segtiga dikatakan sebangin jika dan hanya jika ketiga sudut yang bersesuaian kongruen dan perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian sama. Seperti pada segitiga yang kongruen, kita tidak perlu untuk membuktikan keenam hal tersebut. Di sini, terdapat beberapa hal yang akan memungkinkan kita menyatakan bahwa dua segitiga tersebut sebangun tanpa harus membuktikan keenam tersebut.

Teorema 6.4 (Sd-Sd-Sd)

Jika sudut-sudut yang besesuaian dari dua segitiga kongruen, maka kedua segitiga tersebut sebangun.

Diketahui:

$\angle A \cong \angle X, \angle B \cong \angle Y, \angle C \cong \angle Z$



Buktikan:

$\Delta ABC \sim \Delta XYZ$

Bukti:

Langkah	Pernyataan	Alasan
1	$\angle A \cong \angle X, \angle B \cong \angle Y, \angle C \cong \angle Z$	Premis
2	Konstruksi titik P pada $\overline{XY}$ sehingga $\overline{XP} \cong \overline{AB}$	Premis tambahan
3	Konstruksi $\overline{PQ}$ sedemikian hingga $\overline{PQ} \parallel \overline{YZ}$	Premis tambahan
4	$m\angle XPQ = m\angle ABC$	Langkah 2,3
5	$m\angle XQP = m\angle ACB$	Langkah 2,3

Langkah	Pernyataan	Alasan
6	$m\angle PXQ = m\angle BAC$	Langkah 4,5
7	$\Delta XPQ \cong \Delta ABC$	Langkah 2,4,5,6
8	$\overline{XQ} \cong \overline{AC}$	Langkah 7
9	$\frac{XB}{XP} = \frac{XC}{XQ}$	Teorema
10	$\frac{XB}{AB} = \frac{XC}{AC}$	Langkah 7,9
11	$\Delta ABC \sim \Delta XYZ$	Langkah 10

Teoerema 6.4 di atas mengakibatkan dua teorema akibat seperti berikut.

Akibat 6.1 (Sd-Sd)

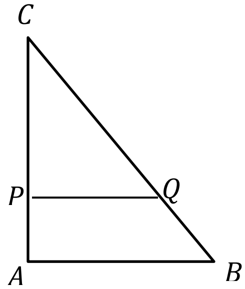
Jika dua pasang sudut yang bersesuaian dari dua segitiga kongruen, maka segitiga tersebut sebangun.

Akibat ini sesuai dengan akibat pada kekongruenan. Hal ini berarti jika dua pasang sudut-sudut yang bersesuaian pada dua segitiga kongruen, maka pasangan ketiga dari sudut segitiga tersebut juga harus kongruen. Akibatnya sudut-sudut yang bersesuaian pada kedua segitiga tersebut kongruen.

Akibat 6.2

Jika sebuah garis sejajar dengan salah satu sisi segitiga dan memotong dua sisis yang lain pada dua titik yang berbeda, maka segitiga yang terbentu sebangn dengan segitiga mula-mula.

Diketahui: $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$



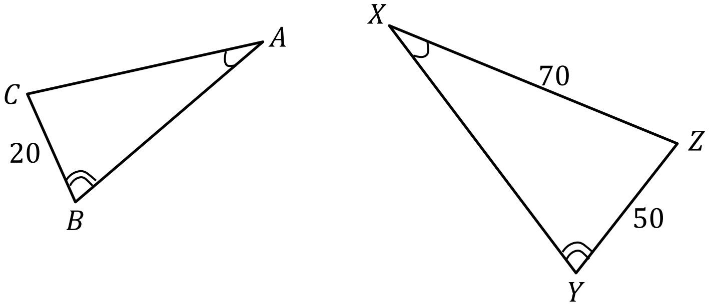
Buktikan: $\Delta ABC \sim \Delta PQC$

Bukti:

Langkah	Pernyataan	Alasan
1	$\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$	Premis
2	$\angle CPQ \cong \angle CAB$	Langkah 1
3	$\angle CQP \cong \angle CBA$	Langkah 1
4	$\angle PCQ \cong \angle ACB$	Akibat 5.1
5	$\Delta ABC \sim \Delta PQC$	Akibat 5.1

Contoh 6.1

Diberikan dua buah segitiga seperti pada gambar di bawah ini!



Jawab pertanyaan berikut:

a. Buktikan bahwa kedua segitiga tersebut sebangun!

b. Tentukan panjang AC.

Penyelesaian:

a. $\angle A \cong \angle X$ dan $\angle B \cong \angle Y$. Dengan menggunakan Akibat 5.1, maka $\Delta ABC \sim \Delta XYZ$

b. $\frac{YZ}{BC} = \frac{XZ}{AC} \Leftrightarrow \frac{50}{20} = \frac{70}{AC} \Leftrightarrow AC = 28$

> **Teorema 6.5 (S-Sd-S)**
> Jika dua pasang sisi yang bersesuaian dari dua segitiga sebanding dan sudut-sudut yang diapitnya kongruen, maka kedua segitiga tersebut sebangun.

Diketahui: $\Delta ABC, \Delta XYZ, \angle C \cong \angle Z, \frac{XZ}{AC} = \frac{YZ}{BC}$

Buktikan: $\Delta ABC \sim \Delta XYZ$

Bukti:

Langkah	Pernyataan	Alasan
1	$\angle C \cong \angle Z$	Premis
2	$\frac{XZ}{AC} = \frac{YZ}{BC}$	Premis
3	Konstruksi titik P pada $\overline{XY}$ sehingga $\overline{XP} = \overline{AB}$	Premis tambahan
4	Konstruksi titik Q pada $\overline{XZ}$ sehingga $\overline{XQ} = \overline{AC}$	Premis tambahan
5	$\frac{XY}{XP} = \frac{XZ}{XQ}$	Langkah 3,4
6	$\frac{PY}{XP} = \frac{QZ}{XQ}$	Lemma
7	$PQ \parallel YZ$	Lemma
8	$\Delta XPQ \sim \Delta XYZ$	Langkah 5,6,7
9	$\Delta XPQ \sim \Delta ABC$	Langkah 3,4

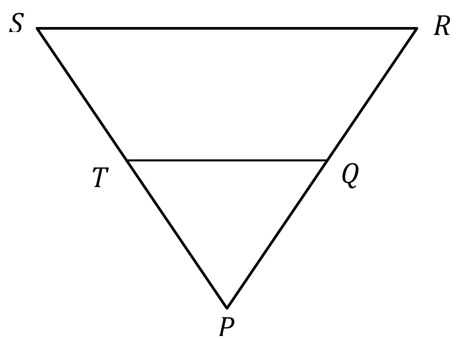
Langkah	Pernyataan	Alasan
10	$\Delta ABC \sim \Delta XYZ$	Langkah 8,9

Contoh 6.2

Diberikan sebuah segitiga PRS. Jika titik T pada titik tengah $\overline{PS}$ dan titik Q pada titik tengah $\overline{PR}$. Buktikan bahwa ΔPTQ sebangun dengan ΔPSR.

Penyelesaian:

Diketahui: $\Delta PSR, T$ pada titik tengah $\overline{PS}$, Q pada titik tengah $\overline{PR}$



Buktikan: $\Delta PTQ \sim \Delta PSR$

Bukti:

Langkah	Pernyataan	Alasan
1	T pada titik tengah $\overline{PS}$	Premis
2	Q pada titik tengah $\overline{PR}$	Premis
3	$PT = \frac{1}{2} PS$	Langkah 1
4	$PQ = \frac{1}{2} PR$	Langkah 2
5	$\frac{PT}{PS} = \frac{1}{2}$	Langkah 3
6	$\frac{PQ}{PR} = \frac{1}{2}$	Langkah 4

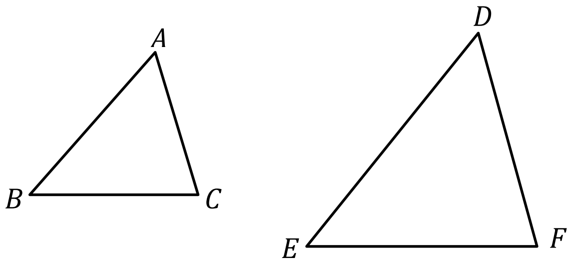
Langkah	Pernyataan	Alasan
7	$\angle P \cong \angle P$	berimpit
8	$\Delta PTQ \sim \Delta PSR$	Langkah 5,6,7

Mari Bernalar

Diketahui ΔABC dan ΔPQR. ΔABC memiliki tinggi k kali tinggi ΔPQR dan panjang alas ΔABC adalah k kali tinggi ΔPQR. Jelaskan mengapa dua segitiga tersebut tidak sebangun!

Teorema 6.6 (S-S-S)

Jika sisi-sisi yang bersesuaian dari dua segitiga sebanding, maka kedua segitiga tersebut sebangun.



Diketahui: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

Buktikan: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

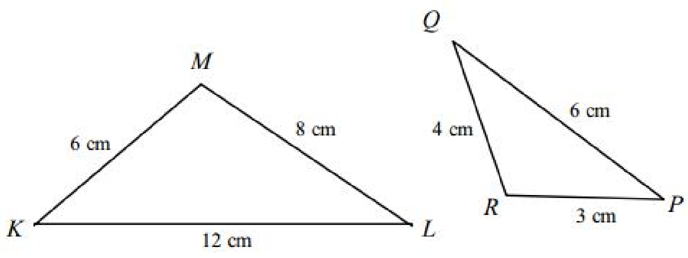
Bukti:

Langkah	Pernyataan	Alasan
1	$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$	Premis

Langkah	Pernyataan	Alasan
2	$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k$	Premis tambahan
3	Konstruksi titik P pada $\overline{ED}$ sehingga $EP = BA$	Premis tambahan
4	Konstruksi $\overline{PQ}$ dengan Q pada $\overline{EF}$ sedemikian hingga $\overline{PQ} \parallel \overline{DF}$	Premis tambahan
5	$\Delta EPQ \cong \Delta EDF$	Teorema
6	$\frac{EQ}{EF} = \frac{EP}{ED} = \frac{AB}{ED} = k = \frac{BC}{EF}$	Langkah 5
7	$EQ = BC$	Langkah 6
8	$PQ = AC$	Langkah 3,4
9	$\Delta EPQ \equiv \Delta ABC$	Langkah 3,4,8
10	$\angle DEF \cong \angle PEQ \cong \angle ABC$	Langkah 9
11	$\angle EDF \cong \angle EPQ \cong \angle BAC$	Langkah 4,10
12	$\angle EFD \cong \angle EQP \cong \angle BCA$	Langkah 4,10
13	$\Delta ABC \sim \Delta DEF$	Langkah 11,12

Contoh 6.3

Diberikan dua buah segitiga seperti pada gambar di bawah ini.



Buktikn bahwa ΔKLM DAN ΔPQR sebangun, kemudian tulislah pasangan-pasangan sudut yang sama besar!

Penyelesaian:
Perbandingan panjang sisi-sisi yang bersesuaian adalah

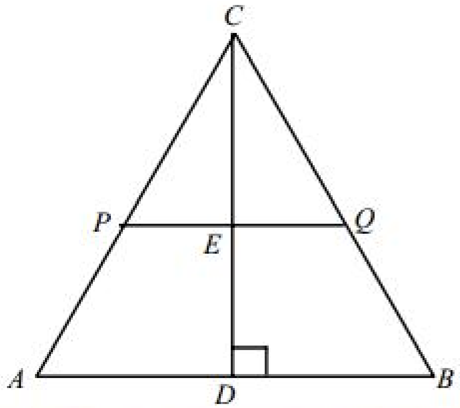
$$\frac{KL}{PQ} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$$
$$\frac{LM}{QR} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1}$$
$$\frac{KM}{PR} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$$

Karena $\frac{KL}{PQ} = \frac{LM}{QR} = \frac{KM}{PR} = \frac{2}{1}$, maka ΔKLM DAN ΔPQR sebangun.

Sisi $\overline{KL}$ bersesuaian dengan $\overline{PQ}$, sudut di depan $\overline{KL}$ adalah $\angle M$ dan sudut di depan $\overline{PQ}$ adalah $\angle R$, artinya $m\angle M = m\angle R$. Sisi $\overline{LM}$ bersesuaian dengan $\overline{QR}$, sudut di depan $\overline{LM}$ adalah $\angle K$ dan sudut di depan $\overline{QR}$ adalah $\angle P$, artinya $m\angle K = m\angle P$. Sisi $\overline{KM}$ bersesuaian dengan $\overline{PR}$, sudut di depan $\overline{KM}$ adalah $\angle L$ dan sudut di depan $\overline{PR}$ adalah $\angle Q$, artinya $m\angle L = m\angle Q$.

Contoh 6.4

Diketahui $\Delta ABC \sim \Delta PQC$ dan perbandingan $CP : CA = CQ : CB$ seperti gambar di samping.



Jika $CP : CA = 1 : 2$, buktikan bahwa:

a. Keliling $\Delta ABC = 2 \times$ keliling ΔCPQ!

b. Luas $\Delta ABC = 4 \times$ keliling ΔPQC!

Penyelesaian:

a. Bukti:

Langkah	Pernyataan	Alasan
1	$\Delta ABC \sim \Delta PQC$	Premis
2	$CP: CA = CQ: CB$	Premis tambahan
3	$CP: CA = 1: 2$	Premis tambahan
4	$CA = 2CP$	Langkah 2,3
5	$CB = 2CQ$	Langkah 2,3
6	$CP: CA = PQ: AB$	Langkah 1,2
7	$AB = 2PQ$	Langkah 3,6
8	Keliling $\Delta ABC = AB + BC + CA$	Definisi
9	Keliling $\Delta ABC = 2CP + 2CQ + 2PQ$	Langkah 4,5,7,8
10	Keliling $\Delta ABC = 2(CP + CQ + PQ)$	Langkah 9
11	Keliling $\Delta ABC = 2 \times$ keliling ΔCPQ	Langkah 10

b. Bukti:

Langkah	Pernyataan	Alasan
1	$\Delta ABC \sim \Delta PQC$	Premis
2	$CP: CA = CQ: CB$	Premis tambahan
3	$CP: CA = 1: 2$	Premis tambahan
4	$CP: CA = CE: CD$	Langkah 1,2
5	$CD = 2CE$	Langkah 3,4

Langkah	Pernyataan	Alasan
6	$CP: CA = PQ: AB$	Langkah 1,2
7	$AB = 2PQ$	Langkah 3,6
8	Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} AB \times CD$	Definisi
9	Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times 2PQ \times 2CE$	Langkah 5,7,8
10	Luas $\Delta ABC = 4(\frac{1}{2} PQ \times CE)$	Langkah 9
11	Luas $\Delta ABC = 4 \times$ luas ΔCPQ	Langkah 10

Mari Bernalar

Diketahui dua segitiga dengan dua sudut pasang sudut yang bersesuaian kongruen dan sisi yang diapit dua sudut tersebut juga sebanding, sehingga memenuhi **Sd-S-Sd**. Apakah hal itu berlaku? Selidiki!

F. Pemanfaatan Kesebangunan

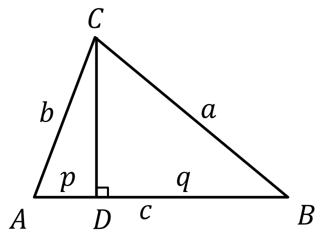
Pada dasarnya, kesebangunan merupakan salah satu konsep yang mempunyai banyak hubungan dengan konsep lain. Tidak hanya sebagai konsep yang berdiri sendiri, kesebangunan digunakan untuk membuktikan beberapa teorema yang adalam dalam matematika. Berikut beberapa konsep yang pembuktiannya menggunakan kesebangunan.

Teorema 6.7 (Teorema Pythagoras)

Jika dua sisi dari segitiga siku-siku mempunyai panjang a dan b dan panjang sisi miring (hipotenusa) adalah c, maka $a^2 + b^2 = c^2$

Diketahui:

Panjang sisi segitiga siku-siku a, b, dan c (hipotenusa)



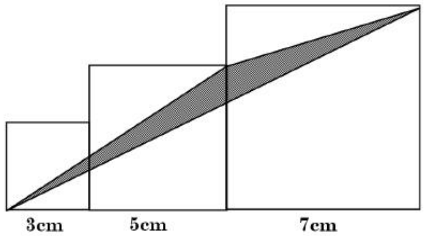
Buktikan: $a^2 + b^2 = c^2$

Bukti:

Langkah	Pernyataan	Alasan
1	ΔACB siku-siku	Premis
2	$AB = c = p + q, AC = b, BC = a$	Premis tambahan
3	Konstruksi $\overline{CD}$ sedemikian hingga $\overline{CD} \perp \overline{AB}$	Premis tambahan
4	$\Delta CBD \sim \Delta ABC$ dan $\Delta ACD \sim \Delta ABC$	Akibat 5.1
5	$\frac{a}{q} = \frac{c}{a}$ dan $\frac{b}{p} = \frac{c}{b}$	Langkah 2,4
6	$a^2 = cq$ dan $b^2 = cp$	Langkah 5
7	$a^2 + b^2 = cq + cp = c(q + p)$	Penjumlahan
8	$a^2 + b^2 = c^2$	Langkah 2, 7

Berpikir Kritis

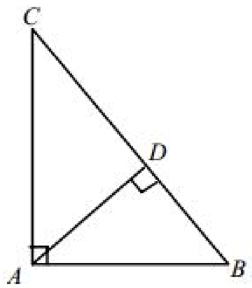
Perhatikan gambar di samping! Bangun di samping terbentuk dari tiga persegi yang ditempatkan seperti gambar di atas. Tentukanlah luas daerah segitiga yang diarsir!



Contoh 6.5

Perhatikan gambar di samping!
Buktikan bahwa:

a. $AB^2 = BC \times BD$
b. $AC^2 = CB \times CD$
c. $AD^2 = DB \times DC$



Penyelesaian:

a. Perhatikan ΔABC dan ΔDBA.
$\angle ABC \cong \angle ABD$ (berimpit)
$\angle A \cong \angle D$ (siku-siku)
Berdasarkan hal tersebut maka $\Delta ABC \sim \Delta DBA$
Akibatnya $AB: BD = BC: AB \Leftrightarrow AB^2 = BC \times BC$ (terbukti)

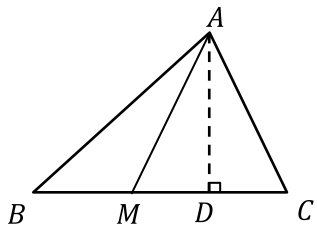
b. Perhatikan ΔACB dan ΔDCA.
$\angle ACB \cong \angle ACD$ (berimpit)
$\angle CAB \cong \angle CDA$ (siku-siku)
Berdasarkan hal tersebut maka $\Delta ACB \sim \Delta DCA$
Akibatnya $AC: CD = BC: AC \Leftrightarrow AC^2 = CB \times CD$ (terbukti)

c. Perhatikan ΔACD dan ΔBAD.
$\angle ADC \cong \angle ADB$ (siku-siku)
$m\angle DCA = (90° - m\angle DCA) = m\angle DAB$
$m\angle DAC = (90° - (90° - m\angle DBA)) = m\angle DBA$
Berdasarkan hal tersebut maka $\Delta ACD \sim \Delta BAD$

Akibatnya $AD: BD = CD: AD \Leftrightarrow AD^2 = DB \times DC$
(terbukti)

Teorema 6.8 (Teorema Apollonius)
Diketahui segitiga siku-siku ABC. Jika titik M adalah titik tengah dari sisi $\overline{BC}$, maka $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

Diketahui:
Segitiga siku-siku ABC dan titik M adalah titik tengah $\overline{BC}$.

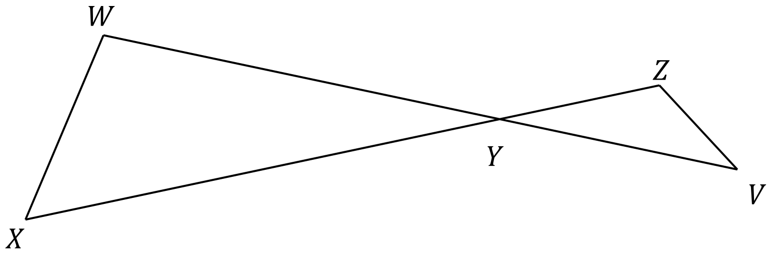


Buktikan: $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$
Bukti:

Langkah	Pernyataan	Alasan
1	ΔABC siku-siku	Premis
2	Titik M adalah titik tengah $\overline{BC}$	Premis tambahan
3	$AB^2 + AC^2 = BD^2 + 2AD^2 + CD^2$	Teorema Pythagoras
4	$AB^2 + AC^2 = (BM + MD)^2 + (BM - MD)^2 + 2AD^2$	Langkah 2,3
5	$AB^2 + AC^2 = 2BM^2 + 2MD^2 + 2AD^2$	Langkah 4
6	$AB^2 + AC^2 = 2BM^2 + 2AM^2$	Langkah 5

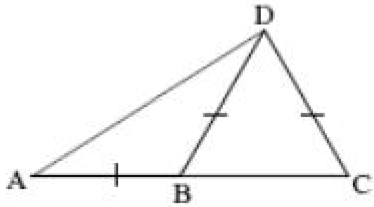
LATIHAN 6.1

1. Perhatikan gambar berikut!

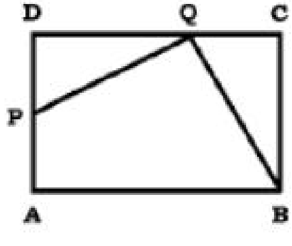


   Jika $WY = 3.VY$ dan $XY = 3.YZ$, maka buktikan bahwa $\Delta WXY \sim \Delta VZY$.

2. Perhatikan gambar di bawah ini!

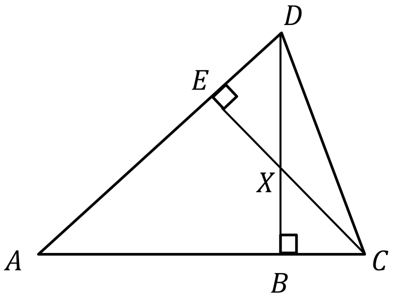


   Segitiga di atas memiliki sisi-sisi dengan panjang $AB = BD = CD$, dan $\angle ADC - \angle BAD = 75°$. Tentukan besar $\angle ADB$.
3. Diberikan segitiga ADC. Jika B terletak pada sisi $\overline{AD}$ sehingga $AB{:}BD = 3{:}4$ dan luas segitiga ADC 49 cm², berapakah luas segitiga ABC!
4. Diketahui $ABCD$ adalah sebuah persegipanjang seperti gambar berikut!



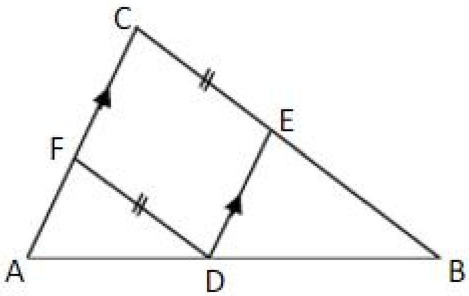
Jika panjang $AB = 3$ cm dan $BC = 2$ cm. jika $BC = DQ$ dan $DP = CQ$, tentukan luas daerah $ABPQ$.

5. Diketahui: ΔACD dengan garis tinggi $\overline{CE}$ dan $\overline{DB}$.



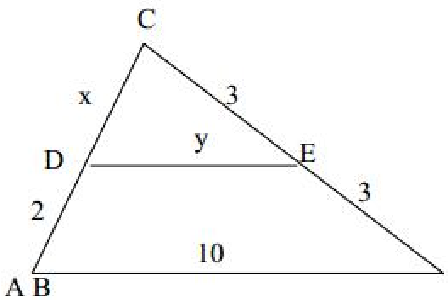
Buktikan: $\Delta DXE \sim \Delta CXB$.

6. Perhatikan gambar berikut!

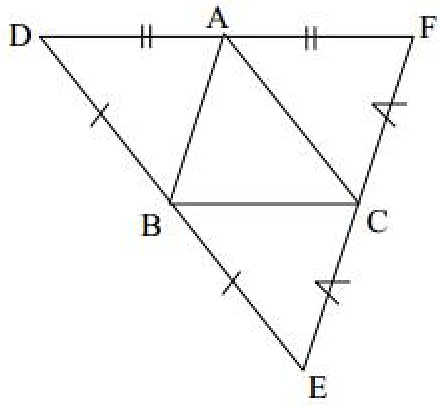


Diketahui panjang $AF = 5$, $AC = 13$ dan $CE = 8$. Tentukan panjang BE!

7. Perhatikan gambar di samping!
   Pertanyaan:
   a. Buktikan bahwa $\Delta ABC \sim \Delta DEC$.
   b. Tentukan nilai x dan y.

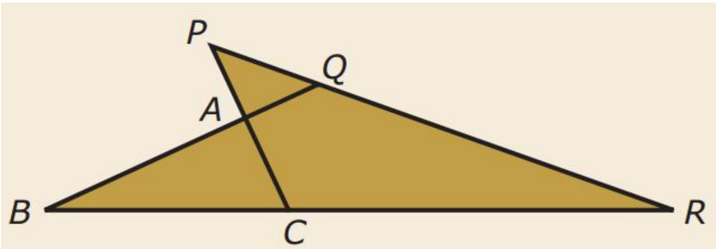


8. Diketahui A, B, C berturut-turut titik tengah darisisi DF, DE, dan FE seperti pada gambar berikut!



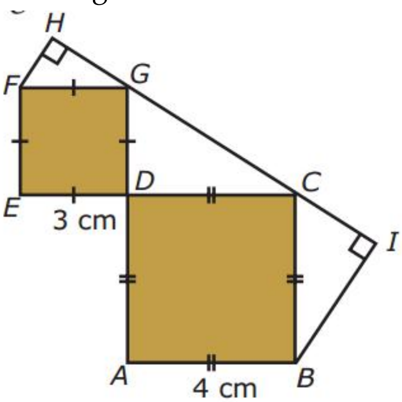
a. Jika $BC = 11, AC = 13$, dan $AB = 15$, maka tentukan keliling ΔDEF.
b. Jika $DE = 18, DA = 10$, dan $FC = 7$, maka tentukan panjang AB, BC, AC.

9. Amati gambar di bawah ini!



Titik P, Q, R berturut-turut terletak pada perpanjangan AC, AB, dan BC pada suatu egitiga ABC. Jika P, Q, R segaris, buktikan bahwa $\frac{AQ}{QB} = \frac{BR}{RC} = \frac{CP}{PA} = 1$.

10. Perhatikan gambar berikut!



Berdasarkan gambar di atas, buktikan:

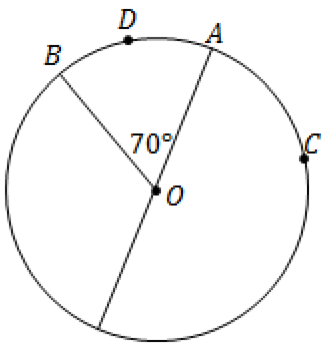
a. ΔDCG sebangun dengan ΔIBC.

b. ΔDCG sebangun dengan ΔHGF. Kemudian tentukan panjang CI, IB, HG, dan HF.

BAB VII
LINGKARAN

A. Ukuran Busur dan Panjang Busur

Gambar di bawah ini merupakan lingkaran dengan pusat O. Misalkan Anda berjalan di sepanjang lingkaran berlawanan arah jarum jam dari A ke B. Bagian lingkaran yang Anda jalani adalah busur AB, ditulis (AB).



Gambar 7.1

Ukuran $\widehat{AB}$ dinyatakan dalam derajat, dan sama dengan ukuran dari sudut pusat AOB. Jadi, ukuran busur AB adalah 70°. Artinya, dari A ke B Anda telah berjalan 70° pada keliling lingkaran. Hal ini menunjukkan seberapa jauh bagian yang telah dikelilingi dari lingkaran 360°. Jika Anda berjalan ke arah lain (searah jarum jam) dari A ke C ke B, Anda akan berputar sejauh 290° pada keliling lingkaran.

Sekarang kita definisikan istilah ini lebih tepatnya. Sudut pusat lingkaran adalah sebuah sudut yang titik sudutnya merupakan titik pusat lingkaran. Jadi, jika A dan B adalah titik pada lingkaran O, maka $\angle AOB$ adalah sudut pusat. Jika $\angle AOB$ bukan sudut lurus, titik pada $\odot O$ berada pada interior $\angle AOB$

merupakan busur minor $\widehat{AB}$. Titik A dan B adalah titik akhir busur.

Titik pada $\odot O$ yang berada pada eksterior $\angle AOB$ merupakan busur mayor pada lingkaran O. Pada gambar di atas, merupakan busur $\widehat{ACB}$. Titik ketiga C dimuat untuk membedakan antara busur mayor $(\widehat{ACB})$ dengan busur minor $(\widehat{AB})$. Untuk penjelasan lebih, busur minor di atas dapat juga ditunjukkan oleh $\widehat{ADB}$.

Jika sudut pusat adalah sudut lurus, maka busur yang terbentuk disebut setengah lingkaran. Gambar di atas $\angle AOE$ merupakan sudut lurus, dan kedua$\widehat{ACE}$ dan $\widehat{ABE}$ merupakan setengah lingkaran.

Definisi 7.1

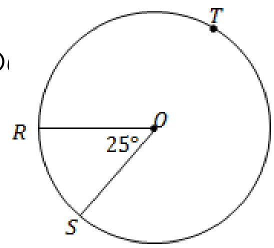
Ukuran **derajat busur kecil atau setengah lingkaran $\widehat{AB}$** lingkaran O, yang ditulis **m$\widehat{AB}$**, adalah ukuran sudut pusat AOB.

Ukuran **derajat busur mayor $\widehat{ACB}$** pada lingkaran O, ditulis **m$\widehat{ACB}$**, sebesar $360° - \text{m}\widehat{AB}$.

Contoh 7.1

Pada gambar di samping merupakan ⊙

a. m$\widehat{RS}$; b. m$\widehat{RTS}$

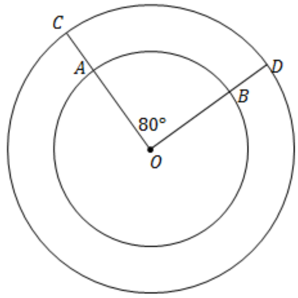


Gambar 7.2

Penyelesaian:

a. m$\widehat{RS}$ = m$\angle$ROS = 25°

b. m$\widehat{RTS}$ = 360° − 25° = 335°

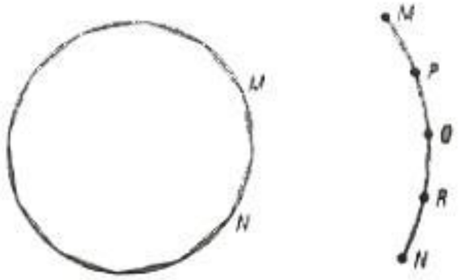


Gambar 7.3

Pada gambar di samping, in the two concentric circles yang berpusat pada titik O, busur $\widehat{AB}$ dan $\widehat{CD}$ memiliki ukuran derajat yang sama, yaitu $\text{m}\angle O : \text{m}\widehat{AB} = \text{m}\widehat{CD} = 80°$. Namun jarak dari C ke D, lebih jauh daripada jarak dari A ke B. Busur $\widehat{AB}$ dan $\widehat{CD}$ memiliki panjang yang berbeda. Panjang busurnya tidak sama dengan ukuran busur. Panjang busur menunjukkan jarak; Ukuran busur menunjukkan besar (derajat) belokan.

Pada gambar lingkaran di samping, panjang $\widehat{CD}$ adalah jarak yang dinyatakan dalam unit linier seperti centimeter atau inci, namun $\text{m}\widehat{CD}$ diukur dalam derajat. Satuan ukurannya berbeda. Untuk menghindari kebingungan, dalam buku ini kita selalu memberi tAnda derajat "° " dengan ukuran busur.

Panjang busur bisa diestimasi dengan menggambar tali busur. **Tali busur** adalah segmen yang titik akhirnya berada pada lingkaran. Pada gambar di bawah ini, panjang $\widehat{MN}$ didekati oleh $MP + PQ + QR + RN$. Dengan menggambar lebih banyak dan lebih banyak tali busur, panjang total mereka mendekati panjang busur. Jika ini dilakukan dengan seluruh lingkaran, maka panjangnya mendekati keliling lingkaran. Rasio keliling C terhadap diameter d i s sama di semua lingkaran yang berbeda. Hal ini dilambangkan dengan slmbol π, huruf Yunani pi.



Definisi 7.2

$\pi = \frac{C}{d}$, dimana C merupakan keliling lingkaran dan d diameter lingkaran.

Nilai π merupakang bilangan irrasional; π tidak dapat ditulis dengan tepat baik secara dalam bilangan desimal mau pun pecahan sederhana karena banyakanya angka desimal atau pengulangan desimal tak terhingga. Desimal π tak terhingga. Dibawah ini 50 desimal pertama.

Gambar 7.4

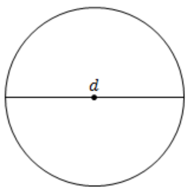
3.1459 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510

Sebagian besar kalkulator ilmiah hanya memiliki nilai π dengan 6 atau 8 angka desimal saja. Nilai π adalah sekitar 3.14159 atau sekitar $\frac{22}{7}$.

Melalui definisi persamaan $\pi = \frac{C}{d}$, untuk C meberikan rumus keliling lingkaran.

Rumus Keliling Lingkaran

Jika sebuah lingkaran memiliki keliling C dan diameter d, maka $C = \pi d$.



Gambar 7.5

Substitusikan $2r$ ke d pada rumus di atas, maka akan diperoleh rumus lingkaran sebagai berkut.

$$C = 2\pi r$$

Substitusikan 3.14 ke π pada rumus keliling lingkaran, maka akan diperoleh rumus lingkaran sebagai berikut.

$$C \approx 3.14d$$

Dalam situasi nyata, perkiraan yang Anda gunakan untuk π bergantung pada keakuratan data. Pada Contoh 2, informasi yang diberikan tidak menjamin perkiraan nilai mendekati 3.14.

Contoh 7.2

Roda sepeda gunung memiliki diameter 22 inci. Jika pengendara bisa mendapatkannya 300 putaran dalam satu menit, seberapa jauh jarak yang ditempuh?

Penyelesaian:

Satu putaran roda sepeda sama dengan panjang keliling roda Misalkan C adalah keliling roda,

$C \approx 3.14 \cdot 22 = 69.08$ inchi tiap putaran.

Dalam 300 putaran, jarak yang ditempuh adalah:

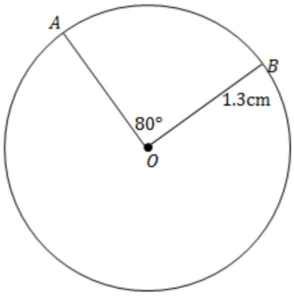
$300 \cdot 69.08 = 20{,}724$ inchi..

Dibagi dengan 12 memperoleh hasil dalam satuan kaki, kira-kira 1727 kaki.

Periksa Apa yang dapat diperoleh dari 1727 kaki? 22” kurang dari 2 kaki. π sedikit lebih dari 3. Jadi keliling roda sekitar 6 kaki. Dalam 300 putaran, sepeda harus berjalan sekitar 1800 kaki. Dengan begitu panjang busur dapat dihitung jika mengetahui jari-jari dan ukuran busur.

Contoh 7.3

Pada $\odot O, OB = 1.3\text{cm}$ dan $m\angle AOB = 80$. Tentukan panjang $\widehat{AB}$.



Gambar 7.6

Penyelesaian

$m\angle AOB = 80$, maka $m\widehat{AB} = 80°$. Artinya, $\widehat{AB}$ merupakan $\frac{80}{360}$ dari keliling $\odot O$. Jadi:

$$\text{AB} = \frac{80}{360} \cdot \text{C}$$

$$\text{AB} = \frac{80}{360} \cdot (2\pi\text{r})$$

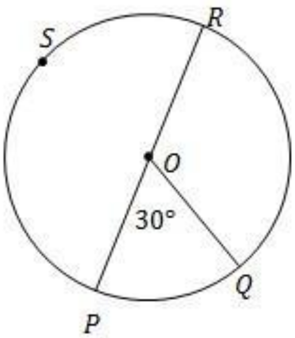
$$\text{AB} = \frac{80}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1.3$$

$$\text{AB} = \frac{208\pi}{360}\text{cm}$$

$$\text{AB} \approx 1.8\text{cm}$$

LATIHAN 7.1

Nomor $1-6$, $\overline{PR}$ adalah diameter $\odot O$ pada gambar di samping.



1. Sebutkan semua busur-busur minor pada gambar!
2. a. $m\widehat{PQ} = \cdots 30°$

   b. $m\widehat{PSQ} = \cdots 330°$
3. a. $m\widehat{PSR} = \cdots 180°$

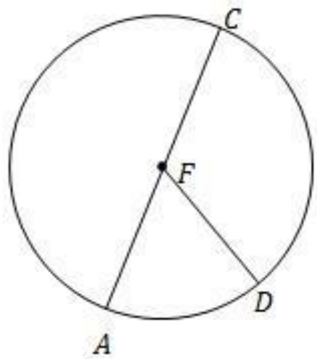
b. m$\widehat{PQR} = \cdots 180°$

c. m$\widehat{QR} = \cdots 150°$

4. P dan Q adalah ______of $\widehat{PQ}$.
5. $\angle ROQ$ adalah sudut ___ pada $\odot O$.
6. $\widehat{PSR}$ adalah ___ .
7. Apa perbedaan antara panjang busur dengan ukuran busur?
8. Keliling lingkaran adalah sinonim dari _____. (perimeter)
9. Apakah keliling lingkaran merupakan panjang busur atau ukuran busur?
10. Definisi π. π adalah $\frac{C}{d}$, dimana C adalah keliling lingkaran dan d the diameter lingkaran.
11. π didekati dengan bilangan pecahan ______ atau dengan bilangan desimal _______ .

Gambar 7.7

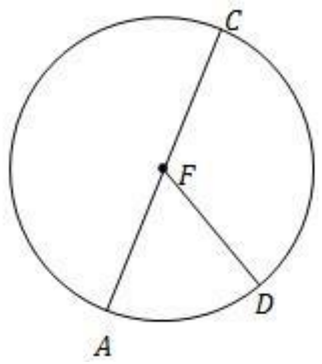
Pada nomor 12 dan 13, lihatlah $\odot F$ di bawah ini.



Gambar 7.8

12. a. Sebutkan semua jari-jari pada gambar lingkaran di atas.
    b. Sebutkan semua diameter pada gambar lingkaran di atas.
    c. Jika $CF = 7$, maka $FD =$ ____.
    d. Jika $CA = 28$, maka $FD =$ ____.
    e. Jika $CA = 6x$, maka $FC =$ ____.
13. Jika $CA = 8$, tentukan keliling lingkaran: a. secara tepat; b. sampai sepersepuluh terdekat.
14. Pada Contoh 2 bab ini, berapa jarak yang ditempuh dalam lima menit, jika roda berputar 210 putaran tiap menit?

15. Pada $\odot O$ di bawah ini, m$\widehat{AB} = 30°$. Tentukan panjang $\widehat{AB}$.



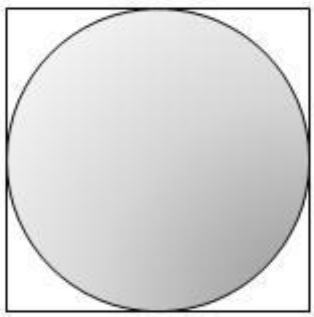
Gambar 7.9

a. Secara tempat; $\frac{5\pi}{6}$ units

b. Mendekati seperseratusnya. 2.62 units

16. Lantai berbentuk persegi dengan panjang sisi 10 meter berisi kolam melingkar. Berapa panjang keliling kolam lingkaran tersebut?

Gambar 7.10

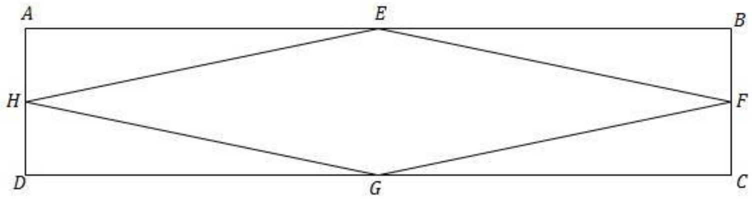


17. Di gedung perusahaan Allen-Bradley di Milwaukee, Wisconsin, ada empat jam yang menghadap ke empat arah yang berbeda. Jarum yang menunjukkan menit pada setiap jam panjangnya adalah 20'. Berapa jauh yang ditempuh ujung jarum menit dalam sehari?

a. Ukuran dalam derajat;

b. Ukuran dalam kaki?

18. Misalkan dibutuhkan waktu 110 detik untuk berjalan mengelilingi taman melingkar. Pada tingkat ini, kira-kira berapa lama waktu yang Anda butuhkan untuk berjalan lurus melewati diameter taman?
19. $E, F, G,$ dan H adalah titik tengah jajar genjang $ABCD$. Jika $AB = 8$ dan $BC = 6$, tentukan keliling $EFGH$.



Gambar 7.11

20. Lihatlah contoh 2. Berapa kecepatan pengendara dalam mil per jam?
21. a. Ukur lingkar leher Anda dengan pita pengukur dengan satuan inchi atau satu centimeter. Contoh: $14\frac{1}{2}$ inches.

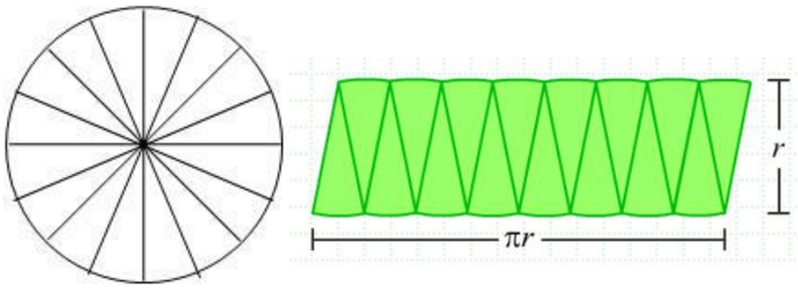
    b. Dengan panjang lingkar leher yang telah diukur, perkirakan berapa jari-jari leher?

    c. Bagaimana cara memeroleh panjang jari-jarinya?

B. Luas Lingkaran

Lingkaran bukan merupakan segi banyak. Namun lingkaran dapat diperoleh melalui pendekatan terhadap segi tak hingga banyak. Kita bisa mencoba mendapatkan luas daerahnya dengan tangkai yang lebih halus dan lebih halus, dengan menggunakan metode pada Pelajaran Ukuran Busur dan Panjang Busur. Namun, lebih mudah menggunakan potongan tiga sisi (atau sektor) dan menempatkannya bersama untuk membentuk bentuk seperti jajar genjang.

Lingkaran A di sebelah kiri di bawah memiliki jari-jari r. Lingkaran dipotong menjadi 16 bagian seperti pada gambar. Setiap sektor mendekati segitiga dengan ketinggian r dengan alasnya melengkung. Di sebelah kanan sektor disusun kembali untuk membentuk sesuatu seperti jajar genjang. Ketinggian "jajar genjang" adalah r. Setiap basis adalah gabungan dari 8 busur. Jadi masing-masing dasar setengah keliling.



Gambar 7.12 Lingkaran *A*

Seiring bertambahnya jumlah juring, susunan juring akan lebih mendekati jajar genjang, dan luas daerah jajar genjang menjadi semakin mendekati luas daerah lingkaran. Dapat diketahui bahwa batas jajar genjang adalah bidang lingkaran. Argumentasi ini merupakan rumusan terkenal.

Rumus Luas Lingkaran

Luas lingkaran A dengan jari-jari r didefinisikan $A = \pi r^2$

Gambar 7.13

$$A = \pi r^2$$

Bukti

Gunakan gambar lingkaran di atas, lingkaran dibagi menjadi potongan yang direformasi untuk mendekati bentuk jajar genjang.

Kesimpulan	**Alasan**
Luas Lingkaran$A$ = limit of Area (parallelogram)	*Congruence dan Additive Properties of Area*
Luas Lingkaran$A$ $= h \cdot b$	*Parallelogram Area Formula*
Luas Lingkaran$A$ $= r \cdot \frac{1}{2} C$	*Substitution*
Luas Lingkaran$A$ $= r \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi r$	*Defnition of circumference*
Luas Lingkaran$A$ $= r \cdot \pi r$	*Association Prop. Of Multiplication*
Luas Lingkaran$A$ $= \pi r^2$	*Definition of exponent.*

Contoh 7.4

Tentukan daerah bagian atas penutup lubang dengan diameter 22”

Penyelesaian:

Diketahui $d = 22”, r = 11”$

Luas lingkaran $= \pi r^2$

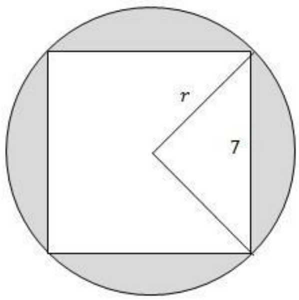
Luas lingkaran $= 121\pi$

Ingat bahwa peluang suatu kejadian adalah rasionya

$$\frac{\text{nilai peluang tertentu}}{\text{nilai peluang semua kemungkinan terjadi}}$$

Contoh 7.5

Sebuah lingkaran digambar melalui empat titik sudut persegi dengan panjang sisi 7 cm.



Gambar 7.14

a. Jika anak panah dilempar secara acak ke dalam lingkaran, berapakah probabilitas bahwa tanah itu berada di alun-alun?

b. Perkiraan luas wilayah yang diarsir antara alun-alun dan lingkaran.

Penyelesaian

a**.** Peristiwa di atas dapat digambarkan sebagai persegi. Peluang sam dengan:

$$\frac{\text{Luas Persegi}}{\text{Luas Lingkaran}}$$

Luas persegi adalah 7^2cm^2, or 49cm^2. Luas lingkaran dapat ditentukan dengan menemukan panjang jari-jari terkebih dahulu. $r^2 + r^2 = 7^2$, jadi $2r^2 = 49$, $r^2 = \frac{49}{2}$cm. Luas lingkaran adalah πr^2, or $\frac{49}{2}\pi$cm. Jadi peluang yang diperoleh adalah:

$$\frac{49\text{cm}^2}{\frac{49\pi}{2}cm^2} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

Dengan menggunakan kalkulator, $\frac{2}{\pi} \approx 0.64$, jadi peluangnya sekitar 64%. Sekitar 64% dari luas lingkaran adalah persegi.

b. Luas Daerah yang diarsir $=$ Luas Lingkaran $-$ Luas Persegi

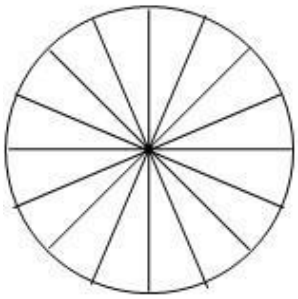
c. Luas Daerah yang diarsir $= \frac{49}{2}\pi - 49$

d. Luas Daerah yang diarsir $= 77 - 49$

e. Luas Daerah yang diarsir $= 28\text{cm}^2$

LATIHAN 7.2

1. Lingkaran dengan jari-jari 10 (gambar di bawah) dibagi menjadi 16 bagian. Ke-enambelas bagian dapat disusun menjadi sebuah jajar genjang.
   a. Berapa tinggi jajar genjang?
   b. Berapa panjang jajar genjang?
   c. Berapa luas jajar genjang?



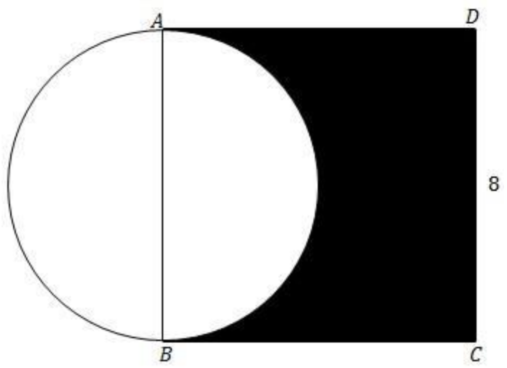
Gambar 7.15

Nomor 2 $-$ 4, tentukan luasnya!

2. Lingkaran dengan jari-jari r.
3. Lingkaran dengan jari-jari 70”.
4. Lingkaran dengan diameter 10 inches.
5. Perkirakan luas lingkaran pada pertanyaan nomor 3 dengan satuan inchi persegi.
6. Pada Contoh 2, misalkan panjang sisi persegi adalah 9 cm.

a. Jika anak panah dilempar secara acak ke dalam lingkaran, berapakah probabilitas tanah di alun-alun?
b. Perkiraan luas wilayah yang diarsir antara alun-alun dan lingkaran (sepersepuluh dengan satuan cm^2).

7. Selesaikan masalah di bawah ini:
   a. Berikan bidang medan yang bisa diirigasi dengan alat penyiram melingkar sepanjang 60 meters yang berputar di sekitar titik tetap.
   b. Berikan keliling bidang ini, dengan satuan meter.
8. Lingkaran dengan luas daerahnya adalah 144π. Tentukan:
   a. jari-jari;
   b. diameter;
   c. keliling;
9. $ABCD$ di bawah ini adalah persegi dengan panjang sisi 8 dan $\overline{AB}$ adalah diameter lingkaran.

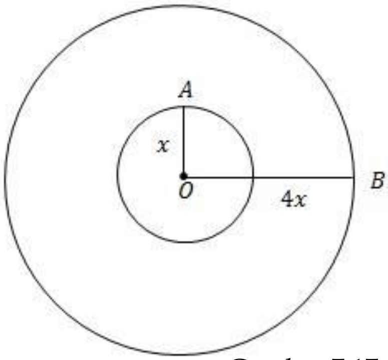


Gambar 7.16

   a. Tentukan luas daerah yang diarsir.
   b. Tentukan keliling daerah yang diarsir.
10. Selesaikan permasalahan di bawah ini:
   a. Pada pizza dengan luas 10 ", tentukan: jari-jari, diameter, atau keliling lingkaran?

b. Berapa banyak bahan yang dibutuhkan untuk pizza dengan luas 18″ dari pizza yang luasnya 10″ dengan ketebalan yang sama?

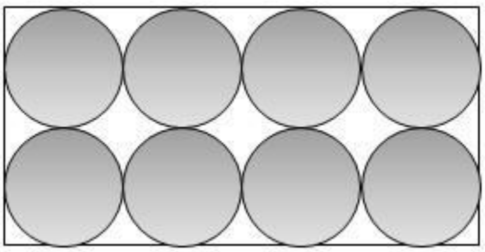
11. Gunakan lingkaran konsentris di samping. $OA = x, OB = 4x$.
Lingkaran kecil itu adalah mata target di papan anak panah. ika anak panah mendarat secara acak di lingkaran besar, Berapa peluang daerah yang didarati di daerah:



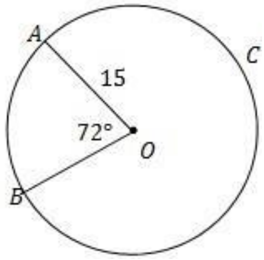
Gambar 7.17

a. mata target di papan anak panah;
b. diluar mata target di papan anak panah?

12. Delapan cakram logam berbentuk lingkaran harus dipotong menjadi potongan 12 cm dari potongan logam 24 cm bagian pada logam. Sisanya terbuang.
a. Berapa banyak logam yang terbuang?
b. Berapa persen logam yang terbuang?

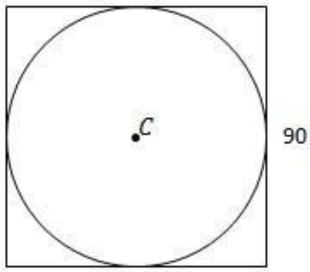

Gambar 7.18

13. Pada $\odot O$ di bawah ini, $OA = 15$ dan $m\angle AOB = 72$.
    a. Tentukan $m\widehat{AB}$.
    b. Tentukan panjang dari $\widehat{AB}$.



Gambar 7.19

14. Kincir angin berputar dalam angin. Jika panjang pisau adalah 12 meter dan itu menghasilkan 15 putaran dalam satu menit, seberapa jauh titik di ujungnya telah ditempuh dalam satu jam?
15. $\odot C$ di bawah ini berada di dalam sebuah persegi dengan panjang sisi 90. Berapa keliling $\odot C$?



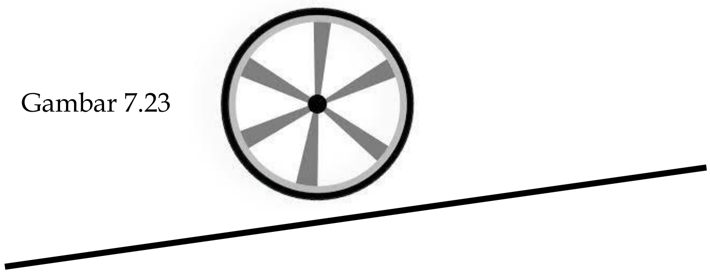
Gambar 7.20

C. Garis Singgung Lingkaran

Pembuktian tidak langsung telah digunakan setidaknya sejak zaman Euclid untuk menyimpulkan teorema. Di awal abad ini, beberapa ahli matematika mencoba melihat apa yang bisa disimpulkan tanpa pembuktian tidak langsung. Para matematikawan ini membiarkan diri mereka hanya menggunakan Buktis langsung langsung. Mereka tidak dapat menemukan prooda langsung untuk banyak teorema penting dimana ada Buktis tidak langsung. Upaya ini menunjukkan bahwa pembuktian tidak langsung diperlukan.

Dalam pelajaran ini, pembuktian tidak langsung digunakan untuk menyimpulkan dua teorema tentang garis singgung. Kata "tangen" berasal dari bahasa Latin yang berarti "sentuh". Hal roda (lingkaran) bersinggungan dengan jalan (garis) saat menggulung naik atau turun jalan. Jika kita roda dan jalan sangat keras, mereka dianggap hanya memiliki titik yang umum.

Gambar 7.23



Definisi 7.3

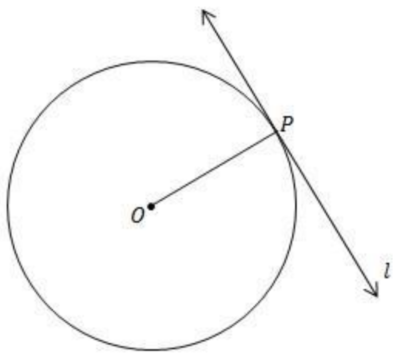
Garis singgung lingkaran adalah sebuah garis yang berpotongan dengan lingkaran pada tepat satu titik.

Titik perpotongan antara lingkaran dengan garis disebut **titik singgung.**

Garis singgung lingkaran dapat dikontruksi dengan mudah, karena mengikuti teorema berikut. Perhatikan seberapa singkat bukti tidak langsungnya.

Teorema 7.1

Jika garis tegak lurus terhadap jari-jari lingkaran di titik ujung jari-jari di lingkaran, maka garis singgung lingkaran.



Bukti

Sketsa

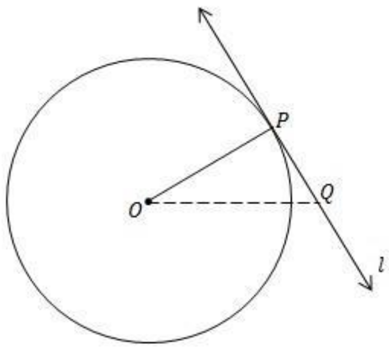
Buat sketsa berdasarkan bunyi teorema.

Diketahui: $\odot O, \overline{OP} \perp l$

Akan Dibuktikan: $\boldsymbol{l}$ adalah garis singgung lingkaran.

Gambar 7.24

Analisis Akan ditunjukkan bahwa tidak ada titik lain yang ada di lingkaran. Asumsikan bahwa ada titik lain pada garis l dan lingkaran. Hal ini akan menimbulkan kontradiksi.



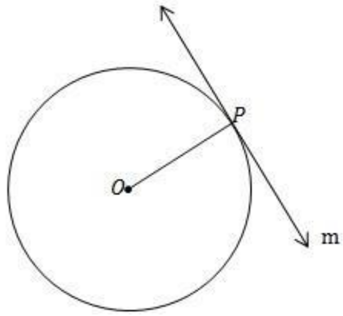
Gambar 7.25

Penjelasan Asumsikan titik Q adalah titik lain pada l dan pada lingkaran, maka diperoleh Q ada pada l, ΔOPQ adalah segitiga siku-siku dengan hipotenusa $\overline{OQ}$. Jadi $OQ > OP$. Namun jika Q ada pada lingkaran maka, $OQ = OP$. Pernyataan $OQ > OP$ dan $OQ = OP$ saling kontradisi. Berdasarkan Hukum Pembuktian Tidak Langsung, asumsi dinyatakan salah. Jadi l berpotongan pada lingkaran di satu titik. Berdasarkan definisi garis singgung (kondisi memenuhi), l bersinggungan dengan $\odot O$.

Kebalikan dari teorema ini adalah benar, namun Bukti-nya lebih panjang. Bukti menggunakan Hukum Kontrapositif.

Teorema 7.2
Jika garis bersinggungan dengan sirkit maka garis tegak lurus terhadap jari-jari ditarik ke titik singgung.

Bukti
Sketsa Sketsalah seperti gambar dibawah ini.

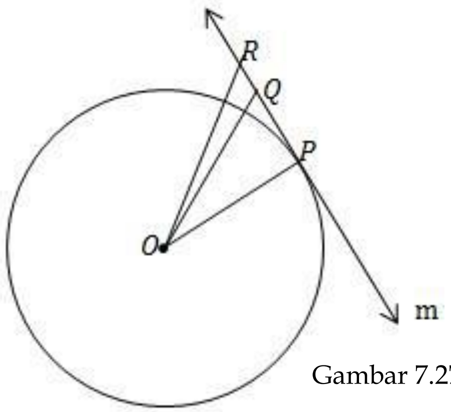


Gambar 7.26

Nyatakan yang diketahui dalam model matematika.
Diketahui: m adalah garis singgung $\odot O$ pada titik P.
Akan Dibuktikan: $\overline{OP} \perp m$

Analisis Kontrapositifnya adalah sebagai berikut:
Diketahui: $\overline{OP}$ tidak $\perp$ dengan m
Akan Dibuktikan: m bukan garis singgung $\odot O$ pada titik P
Kontrapositif akan dibuktikan benar, maka pernyataan asli juga benar.

Pembuktian
Jika $\overline{OP}$ tidak $\perp$ dengan m, ada segmen yang berbeda, $\overline{OQ}$, dapat digambar dari lingkaran O dan tegak lurus dengan m. Titik R pada m maka titik Q berada di antara R dan P dan $QR = QP$. Jadi $\Delta OQR \cong \Delta OQP$ karena berdasarkan teorema kekongruenan S-Sd-S.So $OR = OP$, Artinya R berada pada $\odot O$ (pada jarak yang sama dari O sebagai P). Jadi m memiliki dua titik pada lingkaran. Jadi m bukan garis singgung.



Gambar 7.27

Kontrapositif dapat dibuktikan benar. Berdasarkan Hukum Pembuktian Kontrapositif, pernyataan asli bernilai benar.

Kedua Teorema pelajaran ini dapat ditulis dalam pernyataan jika dan hanya jika.

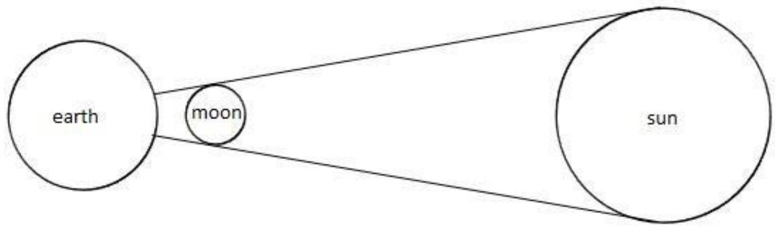
Teorema 7.3 (Garis Singgung dan Jari-jari)

Sebuah garis bersinggungan dengan lingkaran jika hanya jika tegak lurus terhadap jari-jari di ujung jari jari-jari pada lingkaran.

Seperti yang telah Anda pelajari, banyak properti dari tokoh dua dimensi mencakup tiga dimensi. Gagasan tentang tangensi meluas sangat mudah ke bola. Sebuah garis singgung pada bola adalah garis atau bidang yang memotong bola dalam satu titik. Poin itu disebut titik singgung. Contoh umum dari pesawat yang bersinggungan dengan bola adalah bola yang bertumpu pada sebuah jalan.

Gambar 7.28

Anda bisa mendekati bentuk bumi, bulan, dan matahari dengan bola. Saat bulan datang langsung di antara matahari dan sebagian bumi, bagian itu menyaksikan gerhana matahari. Angka di sini menunjukkan ini tapi menyesatkan. Matahari relatif jauh lebih besar karena benda-benda ini jauh lebih jauh dari satu sama lain.



Gambar 7.29

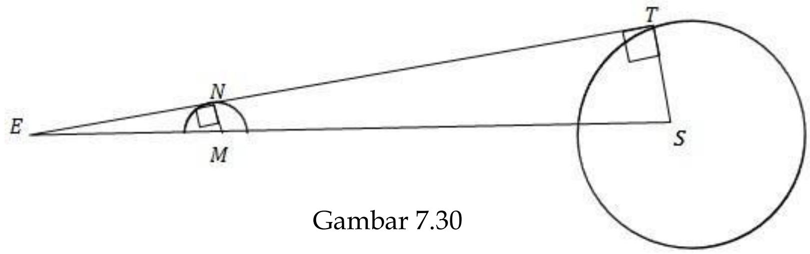
Garis pada gambar di atas adalah garis singgung umum pada bidang bulan dan matahari. Garis singgung sangat dekat dengan berpotongan di bumi; Paling banyak hanya sebagian kecil bumi yang melihat gerhana matahari saat terjadi. Jika Anda mengabaikan bumi dalam gambar, maka gambarnya terlihat seperti bola dan gambar perubahan ukurannya. Artinya ada proposisi. Proporsi ini bisa digunakan untuk menghitung jari-jari matahari.

Contoh 7.6

Diketahui bahwa bulan sekitar 240,000 mil dari bumi, matahari sekitar 93,000,000 mil dari bumi, dan jari-jari bulan adalah 1080 mil. Perkirakan jari-jari matahari.

Penyelesaian

Pertama sketsalah gambar matahari. Diketahui M dan S adalah titik pusat matahari dan bulan. N dan T adaalh titik-titik singgung pada garis singgung yang sama. Dan diketahui jaraknya $EM = 240,000$, $ES = 93,000,000$, dan $MN = 1080$. ST jari-jari pada matahari.



Gambar 7.30

Karena $\overline{MN}$ dan $\overline{ST}$ adalah jari-jari, maka tegak lurus dengan $\overleftrightarrow{ET}$. Kemudian $\angle E$ merupakan sudut pada ΔEMN dan ΔEST, berdasarkan Kesamaan sudut, ΔEMN~ΔEST, maka diperoleh,

$$\frac{EM}{ES} = \frac{MN}{ST}$$

Substitusikan,

$$\frac{240000}{93000000} = \frac{1080}{ST}$$

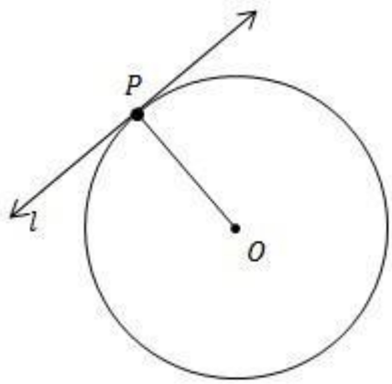
Sederhanakan pecahan menjadi $\frac{24}{9300}$

Tentukan proporsi , $ST = 418{,}500$ mil, dengan mendekati nilai sesungguhnya kira-kira $432{,}000$ mil.

Jari-jari bumi hanya sekitar 3.960 mil, jadi matahari lebih dari 100 kali lebih banyak daripada bumi dalam dimensi liniernya.

LATIHAN 7.3

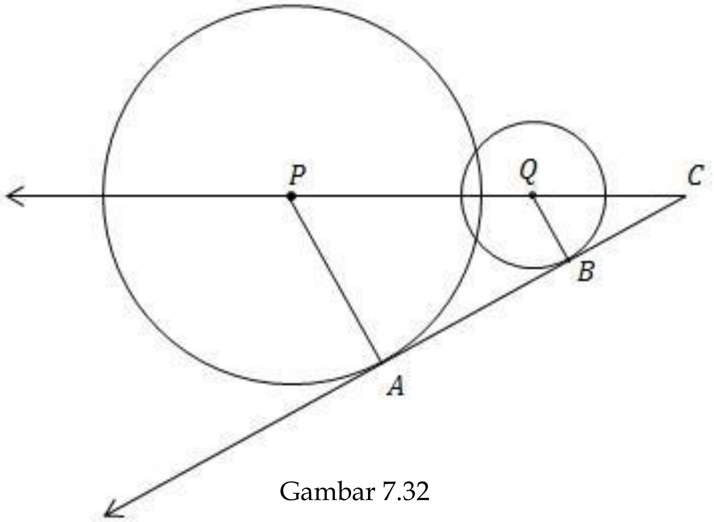
1. a. Berdasarkan definisi garis singgung lingkaran, kapan sebuah garis menjadi garis singgung lingkaran?
   b. Berikan kondisi lain yang cukup agar garis miring menjadi lingkaran.
2. l adalah garis singgung pada$\odot O$ di titik P. Apakah l tegak lurus dengan $\overline{OP}$?



Gambar 7.31

3. Bukti pada teorema pertama, kontradiksi apa yang tercapai?
4. Pilihan ganda. Dua Teorema pertama dari pelajaran ini adalah...
   (a) konvers (b) invers
   (c) kontraposisi (d) negasi
5. Dalam membuktikan teorema kedua pada bab ini, prinsip logika apa yang digunakan?
6. a. Perkirakan berapa kali besar bulan dari matahari.
   b. Perkirakan berapa kali jarak bumi dari matahari dengan bulan dari matahari.

7. $\overleftrightarrow{CA}$ adalah garis singgung lingkaran P dan Q pada titik A dan B. Jka $CB = 5, AB = 10,$ dan jari-jari lingkaran Q adalah 3, berapa panjang jari-jari lingkaran P?



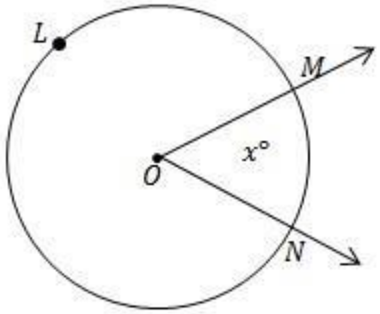
Gambar 7.32

Pada nomor 8-10 , berikan contoh masalah nyata dari ide matematika di bawah ini.

8. Sebuah garis yang bersinggungan dengan lingkaran sebuah roda di jalan.
9. Sebuah pesawat bersinggungan dengan bola bola di lantai.
10. Sebuah garis yang bersinggungan dengan sebuah bidang bola di atas sebuah kawat.

D. Panjang Tali Busur dan Ukuran Busur

Ingat beberapa informasi tentang sudut dan lingkaran. Sudut dengan simpulnya di tengah lingkaran adalah **sudut pusat** lingkaran. Busur lingkaran pada dan di dalam sudut dinyatakan sebagai sudut. Ukuran busur yang membatasi sudut pusat didefinisikan sebagai ukuran sudut pusatnya.



Gambar 7.33

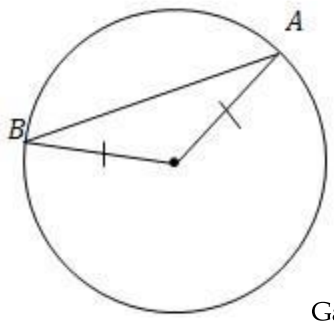
Sudut pusat MON dan busur $\widehat{MN}$ yang membatasi sudut pusat.

$$\mathrm{m}\angle\mathrm{MON} = x°$$

$$\mathrm{m}\widehat{MN} = x°$$

Gambar di atas, $\mathrm{m}\angle\mathrm{MON}$ kira-kira 45°, dan busur $\widehat{MN}$ juga berukuran 45°. Jika $45 = \frac{1}{8} \cdot 360$, pada lingkaran. $\widehat{MN}$ adalah **busur minor** karena ukurannya kurang dari 180°. B**usur mayor** $\widehat{MLN}$ memiliki ukuran $360° - 45°$, atau 315°. Sebuah busur dengan ukuran 180° adalah setengah lingkaran.

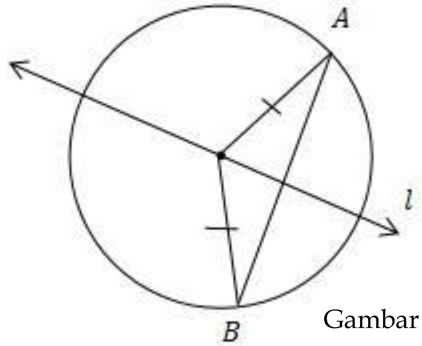
Jika $\widehat{\mathrm{AB}}$. Ketikan $\widehat{AB}$ bukan setengah lingkaran, segitiga yang tersusun dari titik A, B, dan titik pusat O adalah segitiga sama kaki.



$\overline{AB}$ adalah tali busur $\widehat{AB}$.

Gambar 7.34

Anda telah belajar bahwa, dalam segitiga sama segitiga segitiga, garis-garis sudut verteks, garis lurus tegak lurus dari dasar, ketinggian dari simpul, dan median dari simpul semuanya terletak pada garis yang sama. Dalam bahasa lingkaran dan tali busur, ini mengarah ke Teorema berikut.



Gambar 7.35

Teorema 7.4 (Tali Busur Sudut Pusat)

a. Garis yang memuat pusat lingkaran dan tegak lurus dengan tali busur merupakan garis bagi tali busur.

b. Garis yang memuat sudut pusat lingkaran yang mana sudut pusat tersebut merupakan titik tengah dan membagi tali busur merupakan garis bagi tali busur sudut pusat.

c. Garis bagi tali busur sudut pusat merupakan garis yang saling tegak lurus antara tali busur dan garis bagi tali busur.

d. Garis bagi tali busur pada lingkaran memuat titik pusat lingkaran.

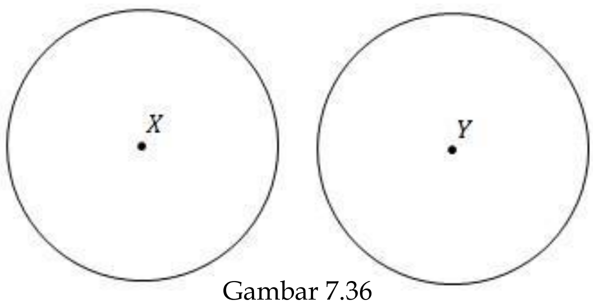
Bukti

Setiap bagian disjikan kembali dengan menggunakan segitiga sama kaki.

a. Ini menyatakan bahwa ketinggiannya adalah rata-rata.

b. Ini menyatakan bahwa __?__merupakan ___?___.
c. Ini menyatakan bahwa __?__merupakan ___?___.
d. Ini menyatakan bahwa __?__merupakan ___?___.

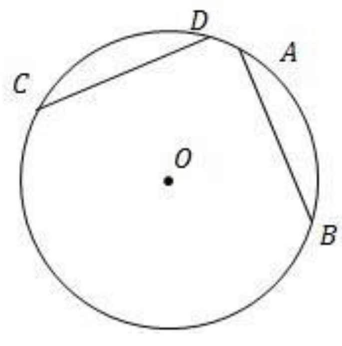
Jika dua lingkaran $\odot X$ dan $\odot Y$ memiliki jari-jari yang sama, maka salah satunya merupakan pemetaan dari yang lainnya berdasarkan translasi yang memetakan X ke Y. Jadi kedua lingkaran tersebut kongruen. Tentunya, jika keduanya memiliki jari-jari yang berbeda, maka isometri mempertahankan jarak, tidak ada isometri yang akan memetakan satu ke yang lain.



Gambar 7.36

Akan dibuktikan bahwa dua lingkaran saling kongruen jika dan hanya jika kedua lingkran tersebut memiliki panjang jari-jari yang sama.

Gambar 7.37



Dua busur sama atau lingkaran kongruen jika memunyai ukuran yang sama, maka keduanya kongruen. Pada lingkaran di bawah ini, dapat dirotasikan $\widehat{AB}$ dengan pusat rotasi O sebesar $\angle AOC$ menjadi $\widehat{CD}$ maka diperoleh $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Maka pada sebuah lingkaran, busur-busur yang sama jika memiliki ukuran yang kongruen dan memiliki tali busur yang kongruen. In dapat membuktikan bagian (a) pada teoreme selanjutnya. Buktikan pada bagian (b).

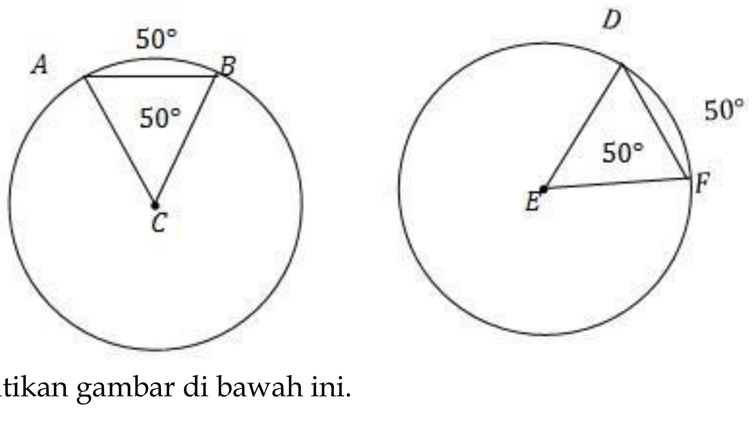
Teorema 7.5 (Kekongruenan Busur-Tali Busur)

Pada sebuah lingkaran yang kongruen, berlaku:

a. Jika dua busur memiliki ukuran yang sama, maka kedua busur kongruen dan kedua tali busur juga kongruen.

b. Jika dua tali busur memiliki panjang yang sama, maka keduanya memiliki ukuran busur minor yang sama.

Pada lingkaran-llingkaran dengan jari-jari berbeda, maka busur-busur dengan ukuran yang sama tidak kongruen. Kedua busur tersebut sama. Namun tali busurnya tidak kongruen.



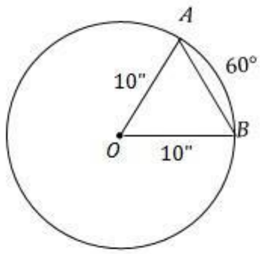
Perhatikan gambar di bawah ini.

$$\mathrm{m}\widehat{AB} = \mathrm{m}\widehat{DE}$$
$$\text{dan } \widehat{AB} \sim \widehat{DE} \text{ but } \widehat{AB} \neq \widehat{DE}$$

Diberikan ukuran pada sebuah busur, dapatkah menentukan panjang tali busurnya? Hal ini dapat diselesaikan dengan menggunakan trigonometri jika jari-jari pada lingkaran diketahui. Jika ukuran busurnya adalah $60°, 90°,$ atau $120°,$ itu dapat diselesaikan tanpa menggunakan trigonometri.

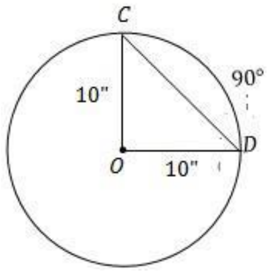
Contoh 7.7

Sebuah lingkaran dengan jari-jari 10″. Tentukan panjang tali busur:
a. Busur 60° ; b. Busur 90° ; c. Busur 120° .



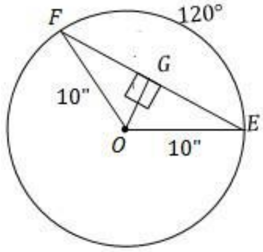
Gambar 7.39

Penyelesaian
Selalu gunakan sketsa gambar untuk menyelesaikannya.
a. ΔAOB adalah sebuah segitiga sama kaki pada titik sudut yang besarnya 60°. Maka segitiga tersebut merupakan segitiga sama sisi.
Jadi $AB = 10°$.



Gambar 7.40

b. ΔCOD adalah sebuah segitiga siku-siku sama kaki.
Jadi $CD = 10\sqrt{2}$≈14.14.

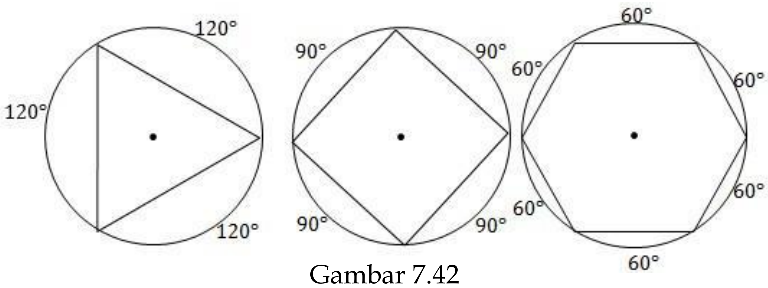


c.Buat garis tinggi $\overline{OG}$ pada ΔOEF.

Gambar 7.41

Dua segitiga dibuat dengan besar sudut pada segitiga 30-60-90
$OE = 2 \cdot OG$, maka $OG = 5".GE = \sqrt{3} \cdot OG$, maka $GE = 5\sqrt{3}"$,
jadi $FE = 10\sqrt{3}"$ or $FE \approx 17.32"$.

Contoh 7.7 menyediakan cara untuk menemukan panjang sisi segitiga segi enam, persegi, atau segitiga biasa yang simpulnya berada di lingkaran. Setiap poligon yang simpulnya terletak pada lingkaran tertentu disebut poligon bertitik. Pusat poligon reguler yang direpresentasikan adalah pusat lingkaran.

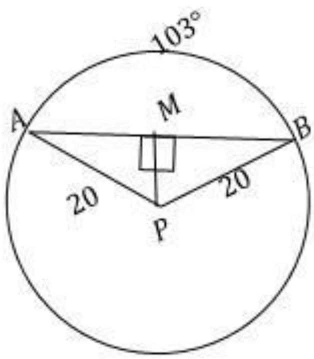


Gambar 7.42

Gunakan trigonometri, maka kamu dapat menemukan panjang tali busur jika diketahui ukuran busur dan jari-jari lingkarannya.

Contoh 7.8

Tentukan panjang tali busur pada sebuah busur dengan ukuran 103° dan jari-jari lingkaran 20 cm.



Gambar 7.43

Penyelesaian

Perhatikan gambar di samping. Ditanyakan panjang $\overline{AB}$.

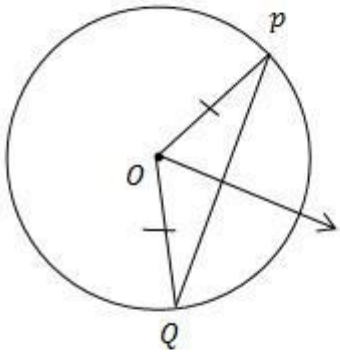
Karena ΔPAB adalah segitiga sama kaki pada titik P, Jika M adalah titik tengah $\overline{AB}$, maka $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ dan $\overline{PM}$ garis bagi $\angle APB$. Diperoleh ΔAPM adalah segitiga siku-siku dan $\text{m}\angle APM = \frac{103}{2} = 51.5$. Tentukan AM, dengan menggunakan trigonometri.

$$\sin 51.5° = \frac{AM}{20}$$

$$AM = 20 \cdot \sin 51.5° \approx 15.65$$

Jika M adalah titik tengah , $AB = 2 \cdot AM \approx 31.30$ cm.

LATIHAN 7.4



Gambar 7.44

1. Ukuran busur minor pada lingkaran adalah ____ dan _____.
2. Ukuran busur mayor pada lingkaran adalah _____ dan _____.
3. Jika $\text{m}\angle \text{POQ} = 98$, maka $m\overline{PQ} =$ _____.
4. Jelaskan mengapa ΔOPQ adalah segitiga sama kaki.
5. Jika $\overline{OM} \perp \overline{PQ}$. Maka $\overline{OM}$ _____ $\overline{PQ}$.
6. Jika $\overline{OM}$ garis bagi $\angle$POQ, maka $\overrightarrow{OM}$ _____ $\overline{PQ}$.
7. Pilihan Ganda

   Dua lingkaran saling kongruen jika dan hannya jika jari-jari masing-masing lingkaran...

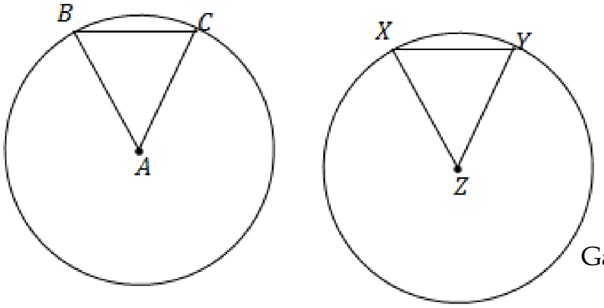
   (a) sejajar

   (b) tegak lurus

   (c) sama panjang

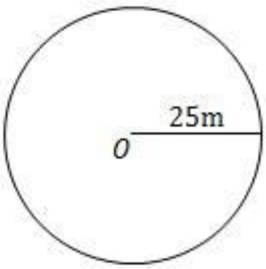
   (d) tidak ada yang benar
8. Perhatikan $\odot Z$ dan $\odot A$ di bawah ini.

   Benar atau salah_ Jika m∠Z = m∠A, maka $XY = BC$.



Gambar 7.45

Pada nomor 10-13, $\odot O$ gunakan lingkaran di bawah ini yang memiliki jari-jari 25 m.



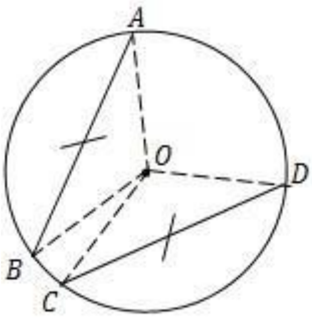
Gambar 7.46

9. Tentukan panjang tali busur pada busur 60°.
10. Tentukan panjang tali busur pada busur 90°.
11. Tentukan panjang tali busur pada busur 120° .
12. Tentukan panjang tali busur pada busur 53°.
13. Lengkapilah pembuktian pada bagian (b) Teorema Kekongruenan Busur dan Tali Busur.

    Diketahui: $AB = CD$ pada $\odot O$ yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini.

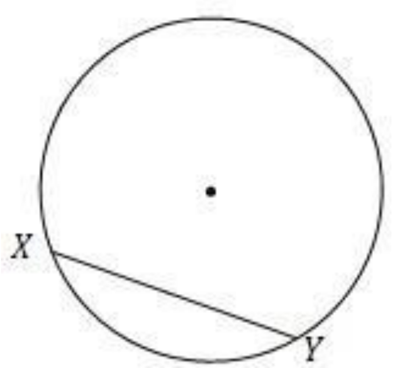
    Akan Dibuktikan: m$\widehat{AB}$ = m$\widehat{CD}$.

    (Hint: Ukuran busur sama dengan ukuran sudut pusat.)



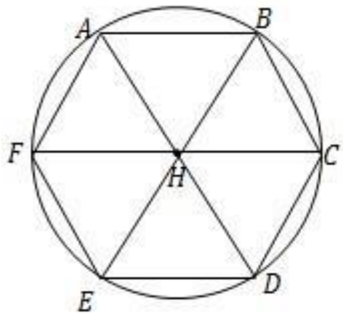
Gambar 7.47

14. Lubang melingkar dengan pusat Q ditunjukkan pada gambar di bawah ini memiliki jari-jari 3 kaki. Tentukan panjang $\overline{XY}$_
(Hint: Tentukan selisih segmen yang tegak lurus dengan $\overline{XY}$



dengan jari-jari lingkaran.)

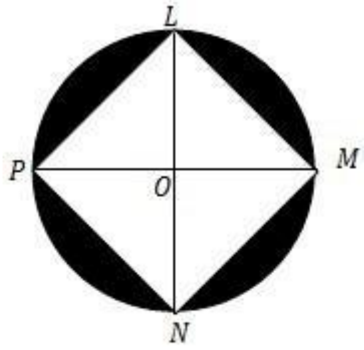
15. Segi enam $ABCDEF$ berada dalam $\odot H$.
Misalkan $HA = 13$



Gambar 7.48

Gambar 7.49

a. Tentukan m∠AHB.
b.Tentukan kelilign $ABCDEF$.

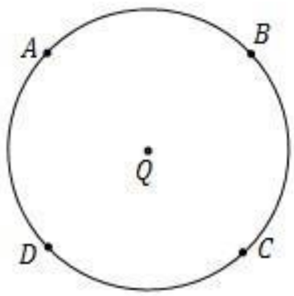


Gambar 7.50

16. LMNP adalah persegi yang berada pada $\odot O$, pada gambar di samping. Jari-jari lingkarna adalah $6\sqrt{2}$. Tentukan panjang sisi persegi.

Pada nomor 18 dan 19, gunakan $\odot Q$ pada gambar di bawah ini.

17. If $m\widehat{ABC} = 178°$ dan $m\widehat{BC} = 94°$, find $m\widehat{AB}$.
18. $m\widehat{AB} + m\widehat{BC} + m\widehat{CD} + m\widehat{AD} =$ _____.



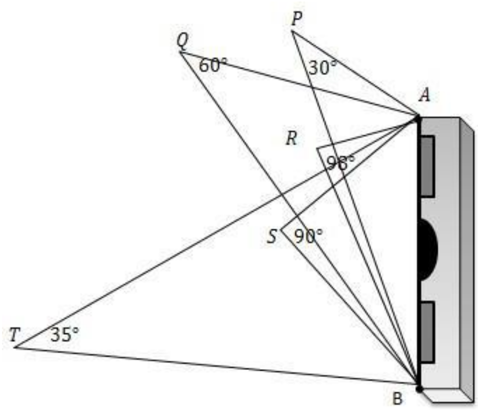
Gambar 7.51

E. Teorema Sudut Keliling Lingkaran

Sudut gambar lensa kamera adalah ukuran yang menunjukkan seberapa lebar bidang penglihatan dapat ditangkap dalam satu foto. Lensa kamera biasa pada kamera Nikon 35 mm memiliki sudut gambar 46 °. Lensa sudut lebar mungkin memiliki sudut gambar sebesar 118 °. Lensa tele memiliki sudut gambar yang lebih kecil, mungkin 18 °.

Gambar 7.52

Inilah situasi dalam fotografi. Anda ingin mengambil gambar bangunan, dan Anda ingin mendapatkan seluruh bagian depan bangunan di gambar Anda. (Asumsikan tinggi bangunan tidak menjadi masalah.) Misalkan Anda hanya memiliki satu lensa normal dengan bidang 46 °. Diagram menggambarkan situasi seperti yang terlihat dari atas.



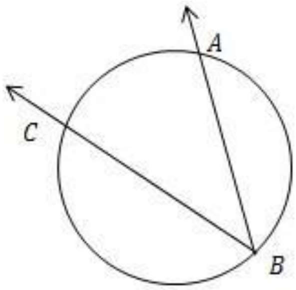
Gambar 7.53

Misalkan A dan B merupakan titik akhir pada gambar banguanan di atas. Jika Anda berada pada Q, m∠AQB lebih besar dari 46°, Gambar tidak dapat mencakup seluruh bagian depan. Hal yang sama berlaku pada titik R dan S. Tetapi pada titik P dan T, seluruh bagian depan bisa digambar. Pertanyaannya:

dimana semua titik simpul yang memuat sudut 46° dengan titik A dan B? Jawabannya mengejutkan. Itu dapat ditemukan dengan menggunakan **sudut keliling lingkaran**.

Definisi 7.4

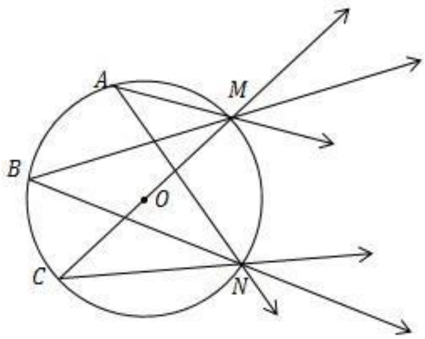
Sebuah sudut dikatakan **sudut keliling lingkaran** jika dan hanya jika sebuah titik sudut pada suatu sudut berada pada lingkaran dan setiap sinar sudut berpotongan dengan lingkaran pada titik-titik yang berbeda dengan titik sudut.



Sudut ABC merupakan sudut keliling lingkaran
yang dibatasi oleh $\widehat{AC}$

Gambar 7.54

Misalkan sudut keliling lingkaran adalah A, B, dan C dengan batas yang sama, $\widehat{MN}$. Dapat ditentukan ukuran busurnya, maka ukuran $\angle MON$ ditentukan oleh m$\widehat{MN}$.

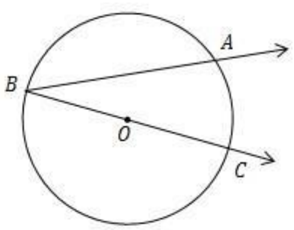


Gambar 7.55

Pada gambar di atas, Anda dapat menentukan $m\angle A = m\angle B = m\angle C \approx 37$, dan $m\widehat{MN} \approx 74°$. Ini adalah contoh dari hubungan yang mengejutkan dan benar dari semua sudut keliling lingkaran dengan batas busur yang sama.

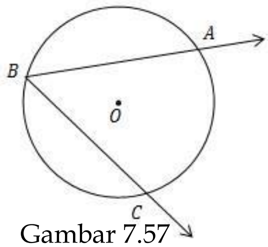
Teorema 7.6 (Sudut Keliling Lingkaran)
Pada sebuah lingkaran, ukuran sudut keliling lingkaran adalah setengah dari ukuran busur yang membatasinya.

Langkah-langkah untuk membuktikan pernyataan di atas dnegna titik pusat O relatif terhadap sudut keliling $\angle ABC$. Terdapat tiga kemungkingan, antara lain Kasus I, Kasus II, dan Kasus III.



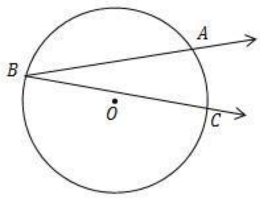
Gambar 7.56

Kasus I: O pada $\angle ABC$



Gambar 7.57

Kasus II: O adalah titik interior $\angle ABC$



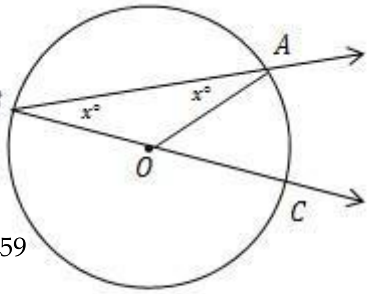
Gambar 7.58

Kasus III: O adalah titik eksterior $\angle ABC$

Bukti
Pada ketiga kasus di atas akan dibuktikan sama.
Given: $\angle ABC$ merupakan sudut keliling $\odot O$.
Akan Dibuktikan: $m\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot m\widehat{AC}$

Kasus I:

Dibuat segmen $\overline{OA}$. Jika ΔAOB adalah segitiga sama kaki, maka $m\angle B = m\angle A$. Misalkan ukurannya x. Berdasarkan teorema sudut eksterior, $m\angle AOC = 2x$.



Gambar 7.59

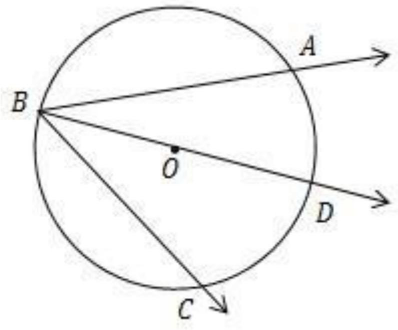
Karena ukuran busur sama dengan ukuran sudut pusat, maka

$m\widehat{AC} = 2x = 2 \cdot, m\angle B$

jadi, $m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$.

Kasus I Akan Dibuktikan bahwa $m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$ ketika sinar $\angle B$ memuat titik O. Hasil ini akan digunakan untuk membuktikan Kasus II dan Kasus III.

Kasus II: Dibuat sinar sudut, $\overrightarrow{BO}$.



Gambar 7.60

$m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC$ *(Postulat Penjumlahan Sudut)*

$m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{AD} + \frac{1}{2} m\widehat{DC}$ *(Berdasarkan Hasil Kasus I)*

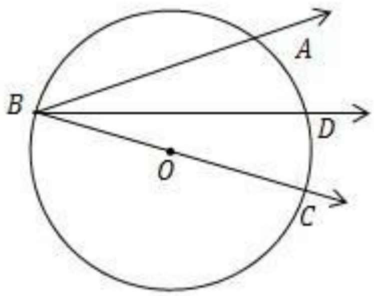
$\text{m}\angle\text{ABC} = \frac{1}{2}\left(\text{m}\widehat{AD} + \text{m}\widehat{DC}\right)$ *(Sifat Distributif)*

$\text{m}\angle\text{ABC} = \frac{1}{2}\text{m}\widehat{AC}$ *(Penjumlahan Busur, Substiutsi)*

Kasus III:

Akan dibuktikan sama seperti Kasus II.

Untuk Kasus III, $\text{m}\angle\text{ABC} = \text{m}\angle\text{ABD} - \text{m}\angle\text{CBD}$



Gambar 7.61

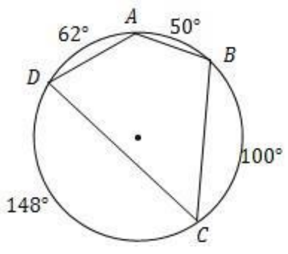
Akan ditanyakan buktinya pada soal nomor 11..

Teorema Sudut Keliling Lingkaran sangat mudah diaplikasiakan.

Contoh 7.9

Terdapat empat titik, $A, B, C,$ dan $D,$ yang membagi lingkaran menjadi busur-busur di bawah ini. Tentukan

Gambar 7.62



ukuran sudut $ABCD$

Penyelesaian

$\text{m}\angle\text{A} = \frac{1}{2}\text{m}\widehat{BCD} = \frac{1}{2}(100° + 148°) = 124$

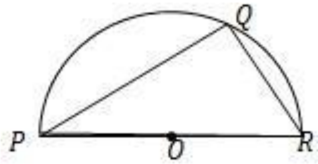
$$\text{m}\angle\text{B} = \frac{1}{2}\text{m}\widehat{ADC} = \frac{1}{2}(62° + 148°) = 105$$
$$\text{m}\angle\text{A} = \frac{1}{2}\text{m}\widehat{DAB} = \frac{1}{2}(62° + 50°) = 56$$
$$\text{m}\angle\text{A} = \frac{1}{2}\text{m}\widehat{ABC} = \frac{1}{2}(50° + 100°) = 75$$

Periksa Ukuran keempat sudut berjumlah 360° maka membentuk segiempat. Selanjutnya, ukurannya terlihat benar.

Contoh selanjutnya menunjukkan konsekuensi mengejutkan dari Teorema Sudut Keliling.

Contoh 7.10

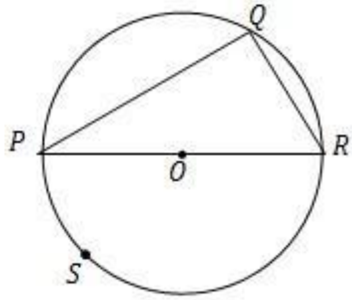
Diketahui $\widehat{PQR}$ adalah setengah lingkaran. Tentukan m∠PQR.



Gambar 7.63

Penyelesaian

Buat grafik lingkaran utuhnya.



Gambar 7.64

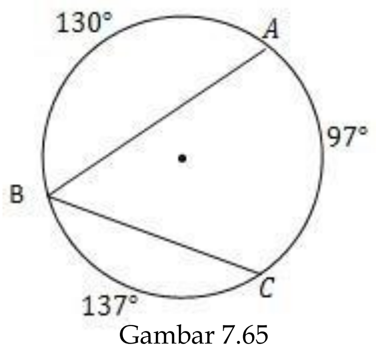
Berdasarkan Teorema Sudut Keliling, $\text{m}\angle\widehat{PQR} = \frac{1}{2}\widehat{PSR}$. Jika $\widehat{PSR}$ merupakan setengah lingkaran, maka $\text{m}\widehat{PSR} = 180°$. Diperoleh $\text{m}\angle\widehat{PQR} = \frac{1}{2} \cdot 180 = 90$. Buktikan contoh 2!

> **Teorema 7.7**
> Sebuah sudut keliling pada setengah lingkaran adalah sebuah sudut siku-siku.

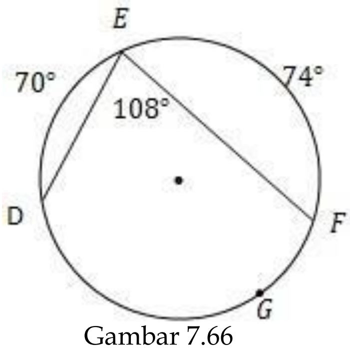
Bagaimana dengan masalah kamera? Jawabannya diberikan dalam Contoh 1 dari pelajaran berikutnya.

LATIHAN 7.5

1. Apa sudut gambar dari lensa kamera?
2. Gunakan diagram di sebelah kanan. Seseorang berada di titik P untuk memotret rumah berada di gambar:
   a. Jika orang tersebut menggunakan lensa kamera biasa?
   b. Jika orang tersebut menggunakan lensa telefoto?
   c. Jika orang tersebut menggunakan lensa *wide-angle*?
3. Gunakan lingkaran di bawah sebelah kiri ini. Berapa m∠ABC?



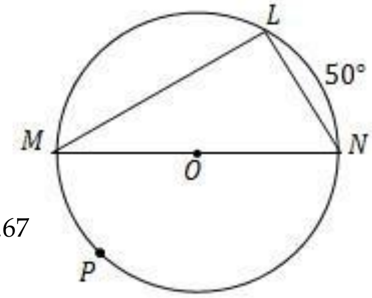
Gambar 7.65



Gambar 7.66

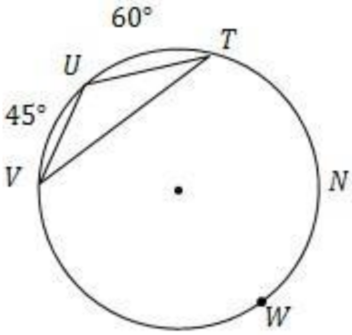
4. Pada lingkaran di atas sebelah kanan, berapa m$\widehat{DFG}$?
5. Sebuah sudut keliling pada setengah lingkaran, berapa ukuran sudutnya?

Pada nomor 6 dan 7, $\overline{MN}$ adalah diameter $\odot\, O$, pada gambar di bawah ini.



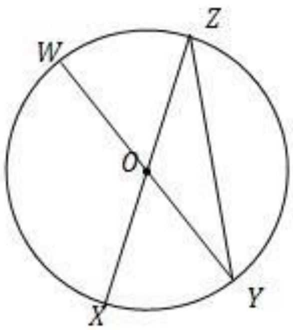
Gambar 7.67

6. a. m$\widehat{ML}$ = __?__.
   b. mMPN = _?__ .
7. a. m∠M = __?__.
   b. m∠N = __?__.
   c. m∠L = __?__.
   d. ΔLMN adalah segitiga __?__ .
8. Gunakan gambar berikut.



Gambar 7.68

   a. ΔTUV adalah _?_ pada lingkaran.
   b. m∠U = __?__.
9. Pada gambar berikut, $\overline{YW}$ dan $\overline{XZ}$ adalah diameter.

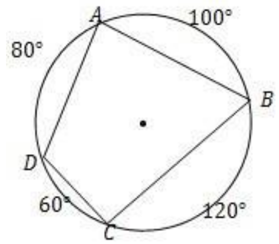


Gambar 7.69

a. m∠WOZ = __?__.

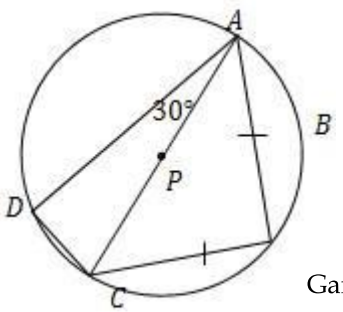
b. m∠Y = __?__.

10. Buktikan dengan menggunakan teorema sudut keliling pada tiga kasus. Apa perbedaan ketiga kasus tersebut?
11. Buktikan kasus III pada teorema sudut keliling.
12. Gunakan gambar di bawah ini. Tentukan keempat sudut segiempat.



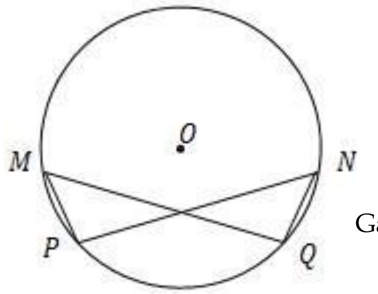
Gambar 7.70

13. $\overline{AC}$ memuat titik pusat lingkaran pada gambar di samping. Hitung sudut-sudut di samping.



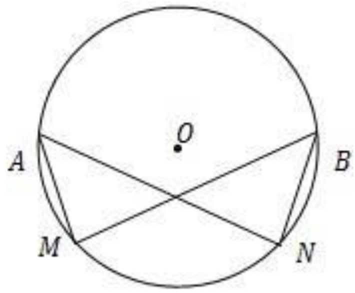
Gambar 7.71

14. Pada $\odot O$ di bawah ini, $\mathrm{m}\angle\mathrm{M} = 35$ dan $\mathrm{m}\angle\mathrm{P} = 92$. If $MP = NQ$, Tentukan $\mathrm{m}\widehat{MP}$.



Gambar 7.72

15. Isi alasan pada bukti di bawah ini bahwa dalam sebuah lingkaran, jika dua sudut memiliki batas busur yang sama, maka mereka memiliki ukuran yang sama.
Diberikan: Sudut keliling AMB dan ANB.
Akan Dibuktikan: $\mathrm{m}\angle\mathrm{AMB} = \mathrm{m}\angle\mathrm{ANB}$.

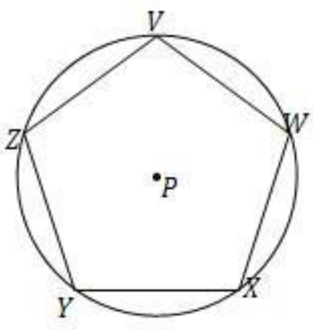


Gambar 7.73

Kesimpulan	Alasan
1. $\mathrm{m}\angle\mathrm{AMB} = \frac{1}{2}\mathrm{m}\widehat{AB}$	a. ______ Teorema Sudut Keliling
2. $\mathrm{m}\angle\mathrm{ANB} = \frac{1}{2}\mathrm{m}\widehat{AB}$	b. ______ Teorema Sudut Keliling
3. $\mathrm{m}\angle\mathrm{AMB} = \mathrm{m}\angle\mathrm{ANB}$	c. ______ Sifat Transitif Euclid persamaan (langkah 1 dan 2)

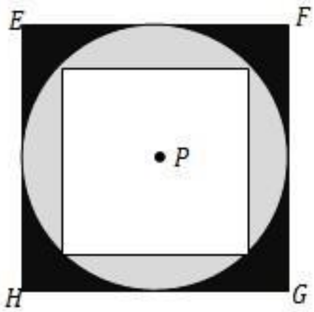
16. Gunakan yang diketahui pada pertanyaan nomor 15.
Akan Dibuktikan: $\Delta AXM \sim \Delta BXN$

17. Dua belas tim berada di liga. Setiap tim saling bermain satu kali. Buat jadwal untuk minggu pertama yang bisa diputar ke jadwal untuk setiap minggu.
18. Carilah perimeter (kelilinng) segitiga sama sisi yang bertuliskan lingkaran jari-jari 24.
19. Titik sudut pada segilima $VWXYZ$ adalah sudut-sudut keliling $\odot P$ pada gambar berikut.
    a. Berapa m$\widehat{WX}$?
    b. Jika $PW = 50$, tentukan keliling segilima!



Gambar 7.74

20. Persegi $ABCD$ adalah sudut keliling P. Persegi $EFGH$ membatasi keliling lingkaran P. Jika r adalah jari-jari lingkaran P, tentukan:
    a. Luas daerah antara lingkaran dan EFGH;
    b. Luas antara ABCD dan lingkaran.
    c. Berapa besar bagain (a) dengan bagian (b)?



Gambar 7.75

DAFTAR PUSTAKA

Coxeter, H.S.M., 1962, *Introduction to Geometry*, New York: John Wiley & and Sons, Inc.

Coxford, Arthur., Usiskin, Zalman., & Hirschhorn, Daniel. 1991. *Geometry*. USA: Scott, Foresman, or Company

Leonard, I.E., Lewis, J.E., Liu, A.C.F.,& Tokarsky, G.W. 2014. Clasical Geometry. Canada: John Wiley& Sons. Inc, Hoboken, New Jersey

Neil, Hugh & Quadling, Douglas. 2002. *Advanced Level Mathematics: Pure Mathematics 1*. New York: Cambridge University Press

___________. 2002. *Advanced Level Mathematics: Pure Mathematics 2&3* . New York: Cambridge University Press

0812-2115-3371

http://bsa.uinsgd.ac.id

bsa@uinsgd.ac.id

Jl. A.H. Nasution No. 105 Cibiru Bandung 40614

ISBN 978-602-52105-7-0

9 786025 210570

REPUBLIK INDONESIA
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

SURAT PENCATATAN
CIPTAAN

Dalam rangka pelindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta, dengan ini menerangkan:

Nomor dan tanggal permohonan	:	EC00201824008, 16 Agustus 2018
Pencipta		
Nama	:	**Meilantifa, H.M.D Soewardini, M.T Budiarto & J. T Manoy**
Alamat	:	Kedurus Dukuh Gang 9A/10, Kel. Kedurus, Karang Pilang, Surabaya, Jawa Timur, 60223
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Pemegang Hak Cipta		
Nama	:	**Meilantifa, H.M.D Soewardini, M.T Budiarto & J. T Manoy**
Alamat	:	Kedurus Dukuh Gang 9A/10, Kel. Kedurus, Karang Pilang, Surabaya, Jawa Timur, 60223
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Jenis Ciptaan	:	**Buku**
Judul Ciptaan	:	**GEOMETRI DATAR**
Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia	:	16 Agustus 2018, di Surabaya
Jangka waktu pelindungan	:	Berlaku selama hidup Pencipta dan terus berlangsung selama 70 (tujuh puluh) tahun setelah Pencipta meninggal dunia, terhitung mulai tanggal 1 Januari tahun berikutnya.
Nomor pencatatan	:	000114378

adalah benar berdasarkan keterangan yang diberikan oleh Pemohon.
Surat Pencatatan Hak Cipta atau produk Hak terkait ini sesuai dengan Pasal 72 Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta.

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL

Dr. Freddy Harris, S.H., LL.M., ACCS.
NIP. 196611181994031001

SURAT PERNYATAAN TANGGUNG JAWAB BELANJA

Yang bertanda tangan di bawah ini :
Nama : MEILANTIFA S.Pd, M.Pd
Alamat : Jalan Kedurus Dukuh IXA/10 Surabaya
berdasarkan Surat Keputusan Nomor 3/E/KPT/2018 dan Perjanjian / Kontrak Nomor 18/LPPM/UWKS/III/2018 mendapatkan Anggaran Penelitian PENGEMBANGAN MODEL PERANGKAT PEMBELAJARAN GEOMETRI DENGAN PROBLEM SOLVING BERBASIS RIGOROUS MATHEMATICAL THINKING (RMT) DI UNIVERSITAS WIJAYA KUSUMA SURABAYA sebesar 125,000,000 .
Dengan ini menyatakan bahwa :
1. Biaya kegiatan penelitian di bawah ini meliputi :

No	Uraian	Jumlah
01	**Honorarium** Pakar, koordinator peneliti, sekretaris peneliti, pembantu lapangan, dan pembantu peneliti , Pph 21	28,420,000
02	**Peralatan Penunjang** Pengolah data	1,500,000
03	**Bahan Habis Pakai** Fotocopy, scan, print, cetak, penjilidan laporan, pulsa, publikasi, materai, ATK, konsumsi uji coba dan rapat, penyusunan laporan	43,720,590
04	**Perjalanan** transport rapat, transport uji coba, transport diskusi ahli, transport pengamat, BBM	47,129,033
05	**Lain-lain** ISBN, HKI, poster,translate	4,285,150
	Jumlah	**125,054,773**

2. Jumlah uang tersebut pada angka 1, benar-benar dikeluarkan untuk pelaksanaan kegiatan penelitian dimaksud.
3. Bersedia menyimpan dengan baik seluruh bukti pengeluaran belanja yang telah dilaksanakan.
4. Bersedia untuk dilakukan pemeriksaan terhadap bukti-bukti pengeluaran oleh aparat pengawas fungsional Pemerintah
5. Apabila di kemudian hari, pernyataan yang saya buat ini mengakibatkan kerugian Negara maka saya bersedia dituntut penggantian kerugian negara dimaksud sesuai dengan ketentuan peraturan perundang-undangan.

Demikian surat pernyataan ini dibuat dengan sebenarnya.

Kota Surabaya, 25 - 9 - 2018
Ketua,

METERAI TEMPEL
DF222AFF125176323
6000
ENAM RIBU RUPIAH

(MEILANTIFA, S.Pd, M.Pd)
NIP/NIK 93213-ET

Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati
Fakultas Adab dan Humaniora
Jurusan Bahasa dan Sastra Arab
Jl. A.H. Nasution 105, Cibiru Bandung 081221153371 Laman: http://bsa.uinsgd.ac.id dan http://digital.uinsgd.ac.id Surel:bsa@uinsgd.ac.id

SURAT KETERANGAN
Nomor: 08/bsafahuinsgd/I/2019

Editor Penerbit Bahasa dan Sastra Arab menerangkan bahwa buku dibawah ini:

Judul Buku	: Geometri Datar
ISBN	: 978-602-52105-7-0
Penulis	: Meilantifa, S.Pd., M.Pd.
	Herfa M. Dewi Soewardini, S.Si, M.Pd
	Prof. Dr. Mega Teguh Budiarto, M.Pd.
	Dr. Janet T. Manoy, M.Pd.
Jumlah Halaman	: 247
Status	: Telah terbit di Penerbit Bahasa dan Sastra Arab pada September 2018

Demikian surat pernyataan ini, dibuat untuk digunakan sebagaimana mestinya.

Bandung, 21 Januari 2019
Editor

Iis Sayyidah Nur Azizah S,Hum